UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TEORIA

DE

GRAFOS

AUTORES: MARCELINO FELIPE ÁLVAREZ NUÑEZ

JONATHAN ALEJANDRO PARRA MUÑOZ

PROFESOR GUIA: Ivo Basso Basso

SEMINARIO PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLÁN, 2013

ÍNDICE GENERAL

2. Aplicaciones

3. Grafos y Educación

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar un trabajo tan arduo y lleno de dificultades como es el desarrollo de una tesis es inevitable que te asalte un muy humano egocentrismo que te lleva a concentrar la mayor parte del mérito en el aporte que has hecho. Sin embargo, el análisis objetivo te muestra inmediatamente que la magnitud de ese aporte no hubiese sido imposible sin la participación de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles mis agradecimientos.

Mis agradecimientos a mi familia por el apoyo brindado desde el primer día que ingrese a la Universidad con sus motivaciones diarias para lograr lo que hoy es el ultimo paso, a mis compañeros y amigos los cuales con ellos pase la difícil misión de luchar cada ramo en arduas tardes de estudios.

También agradecemos a nuestros formadores de la carrera sobre todo a nuestro profesor guía Ivo Basso Basso por aceptarnos a realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo y confianza entregada no solo en esta tesis si no también en nuestra formación académica.

A todos ellos, muchas gracias.

De alguna manera, la matemática es la única actividad humana infinita. Es concebible que eventualmente la humanidad conozco toda la biología o la física. Pero seguramente la humanidad nunca podrá descubrir toda la matemática, porque el tema es infinito. Los números mismos son infinitos. Ésta es la causa por qué la matemática es realmente mi único interés.

Paul Erdos

INTRODUCCIÓN

Nuestro mundo cultural no solo tiene letras y números, hoy en día esta repleto de imágenes. Las imágenes que forman parte de nuestras vidas son, además, de tipos muy diversos. Junto a las de nuestro entorno natural, nos rodea fotografías de todo tipo, y en medio de todas ellas, esquemas no convencionales. Hay esquemas en los logos de una empresa, en las indicaciones del tráfico, en los mapas, en los recorridos de un autobús, etc.

La teoría de grafos es un esquema que permite resolver muchos problemas interesantes y forman ya parte de la matemática actual.

El siguiente texto se centra en el nacimiento de la teoría de grafos a través de un problema turístico que Euler resolvió, para luego dar énfasis al desarrollo, definición y explicación en general de esta teoría.

En el primer capítulo se centrara en todas las nociones básicas que posee desde su comienzo, desde la definición de una aristas hasta los grandes teoremas que hoy existen y pueden ser aplicados en sus tantas aplicaciones.

En el segundo capítulo se relacionara grafos con aplicaciones, que van desde internet y temas científico-técnicos hasta los estudios sociales, recalcando que la teoría de grafos están ahí, en la ciencia, en las investigaciónes, en la vida personal y cotidiana.

Finalmente el último capítulo se centrara en la importancia que puede tener están gran teoría en la educación a través de muchos juegos basados en grafos, los cuales permiten poner a prueba el ingenio mental, diversas experiencias en educación matemática demuestran que hay recursos de la teoría de grafos que si tienen un alto valor formativo, ya que son ejemplos de modelización matemática que a pesar de su simplicidad aportan interesantes situaciones reales que pueden ser descritas y estudiadas asociando grafos.

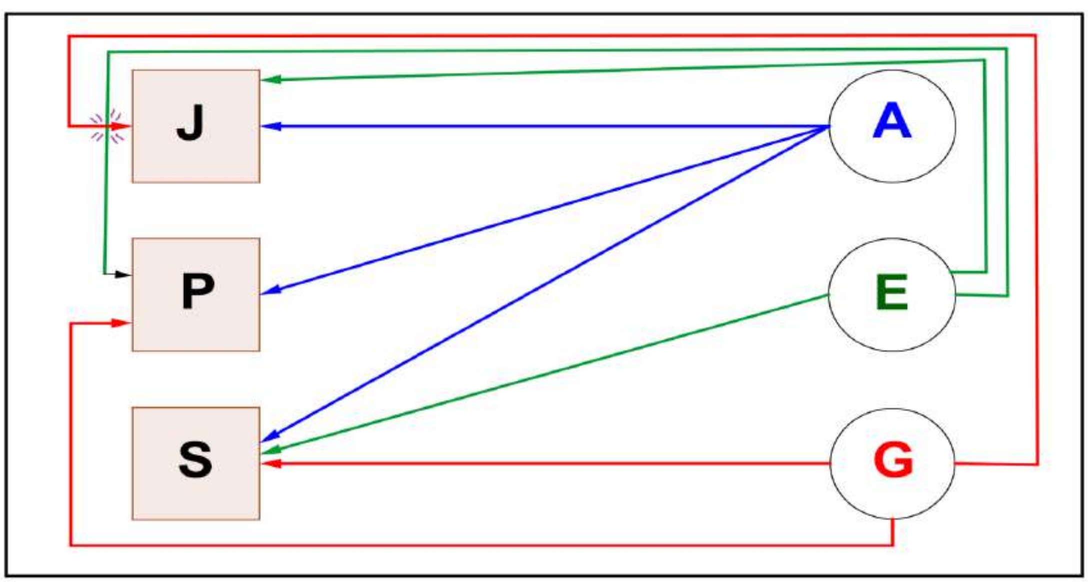
CAPÍTULO 1
NOCIONES BÁSICAS

1.1. Introducción

En el capítulo siguiente se introducirán todos los conceptos y nociones básicas de la teoría de grafos, desde el inicio de la teoría en la ciudad de Königsberg por Euler hasta los grandes teoremas que hoy son fundamentales en las aplicaciones que posee.

1.2. Problema de conexión

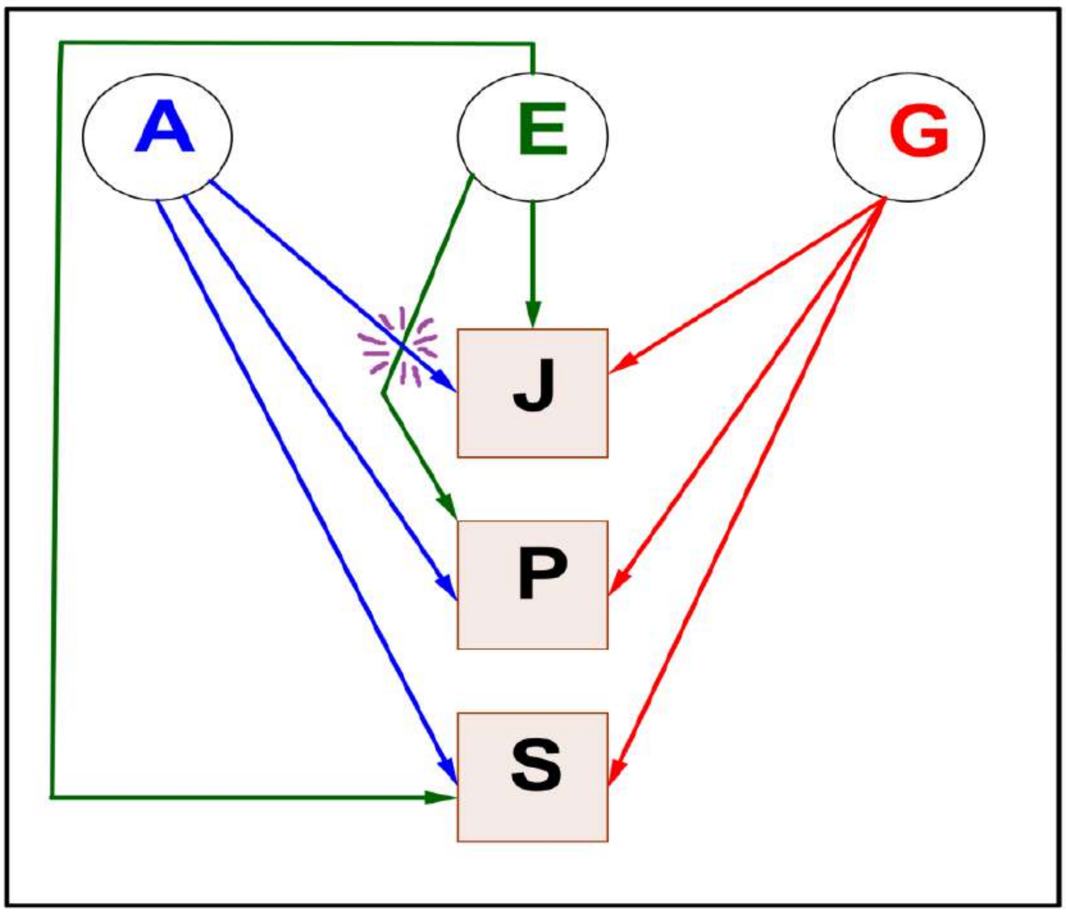
Jorge, Pedro y Sergio deciden construir tres casas en el campo para sus respectivas familias en una misma parcela. La primera dificultad del proyecto surge cuando la empresa de electricidad les comunica que sólo pueden colocar una conexión por parcela, aunque no existe inconveniente para que los usuarios subdividan las conexiones entre las tres casas. Análogas advertencias hacen el servicio de agua y la empresa de gas, además, para evitar inconvenientes técnicos, las conexiones de cables y cañerías no deben cruzarse. Juan trata de dibujar ubicando convenientemente las tres casas y los tres medidores, nadie obliga a que los conductos sean rectos, pueden ser curvos; en el plano no lo consigue porque la novena conexión se cruza siempre con algunas de las anteriores, como lo muestra la siguiente figura.



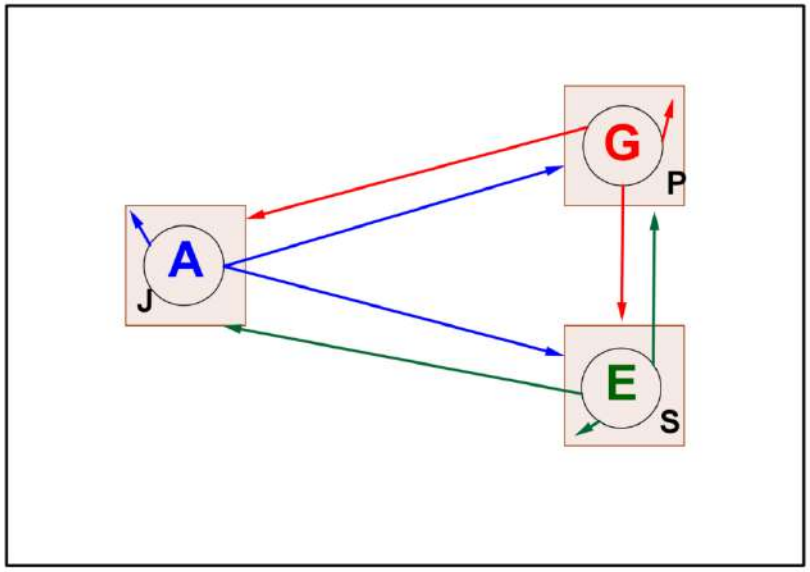
Los cuadrados representan las casas y las circunferencias las respectivas fuentes

Pedro hace una nueva distribución, pero al igual que él anterior la novena conexión se va a cruzar con algunas de las otras.
Uno de ellos dice; creo que la dificultad reside en que, al considerar el problema nos hemos limitado al plano, son darnos cuenta de que hay tres dimensiones. Bastará hacer la conexión eléctrica por el aire en lugar de hacerla a ras de la superficie de la tierra o lo otro sería hacer las conexiones a diferente altura.

Esta es una distribución hecha por Pedro que tampoco tiene solución.



La respuesta al trabajar en el espacio es correcta en la práctica, pero ¿será esto posible resolver el problema sin salirse del plano? ¿Qué característica de la configuración hace irrealizable la conexión el plano? , bueno el último hermano se le ocurrió hacer lo siguiente; Sí ubicamos en cada una de las casas cualquiera de las fuentes, ya sean de electricidad, agua y gas, sería una de las maneras en que al hacer la distribución de las fuentes, los cables y cañerías no se crucen.

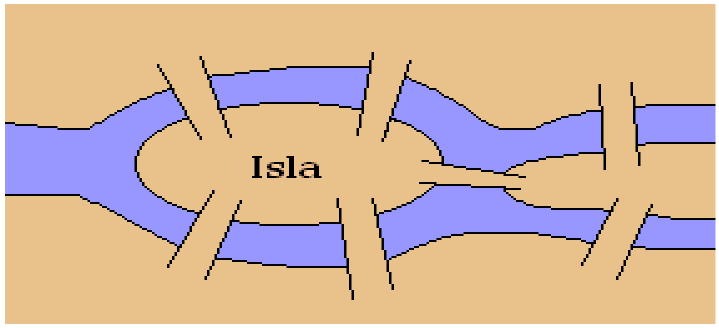


1.3. El problema de los siete puentes

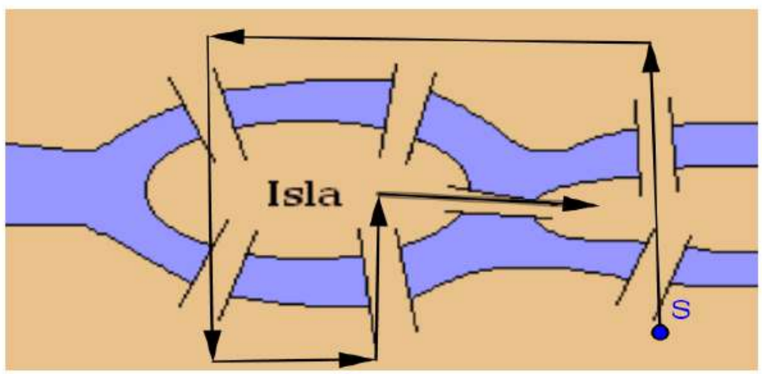
La teoría de grafos se inició gracias a un problema turístico que resolvió Leonhard Euler. Dice la historia que en 1736 el eminente matemático se detuvo, en uno de sus viajes en Königsberg, hoy Kaliningrado situada junto al río Pergel en la costa del Mar Báltico, en la Prusia oriental (Rusia), famosa por sus puentes, ya que cuenta con siete de ellos que unen a la Isla Mayor con la margen derecha y otros dos con la margen izquierda. La Isla menor está conectada por dos puentes a cada lado y el séptimo puente une ambas islas.

La ordenada y lógica mente matemática de Euler plantea el siguiente problema: ¿Será posible planear un paseo de manera que saliendo de casa cruce los siete puentes una sola vez cada uno antes de regresar a casa?

Una versión simplificada de esta disposición, es como se muestra en la figura a continuación

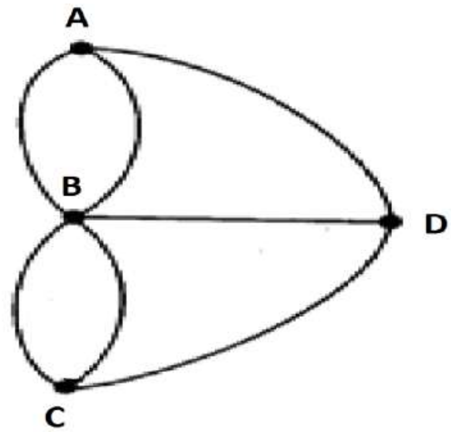


Euler pensó iniciar la partida desde el punto S, frente a la Isla Menor, por lo tanto, recorre a lo más seis puentes, siguiendo cualquier camino y pasando una sola vez por un puente, esto queda de la siguiente manera:



Si se inicia la partida desde el punto S frente a la Isla mayor, recorre a lo más seis puentes, siguiendo cualquier camino y pasando una sola vez por uno de ellos. El diagrama de la ciudad de Königsberg muestra el por qué era totalmente imposible cruzar todos los puentes sin volver a pasar por lo menos dos veces por uno de dicha red, como lo demostró Euler, es inevitable cruzar de nuevo algún puente siempre que hayan tres o más puntos en los cuales converjan una cantidad impar de caminos, como lo es en este caso.

EL diagrama muestra la ciudad prusiana en un esquema simplificado de la misma situación, en el cual cada porción de tierra está indicada por un punto, y los puentes por arcos que conectan esos puntos.



El vértice A recibe 3 caminos, el vértice B recibe 5 caminos, el vértice C recibe 3 caminos y el vértice D recibe 3 caminos, todos son números impares de caminos que convergen a cada vértice. Esto significa que el paseo de Euler es imposible, pues para recorrer los siete puentes, necesariamente debe pasar dos veces por alguno de ellos.

Leonardo Euler: *Matemático suizo (Basilea 1707, Petersburg 1783). Fue uno de los primeros investigadores de la llamada topología, este hombre de ciencia se dedicó a las más variadas disciplinas como el análisis, geometría analítica, geometría diferencial e integral, la teoría de números, etc.*

1.4. Nociones básicas

En términos elementales podríamos definir un grafo como un conjunto de puntos (llamados elementos, vértices, nudos o nodos) con líneas que unen pares de vértice de ellas; en algunos libros se usa red como sinónimo de grafo.

Definición1.1. Grafo es una abstracción matemática que designaremos por $G = (V, A)$donde V es un conjunto de puntos v_i , $V \neq \emptyset$ y A es un conjunto de líneas que unen dos puntos de V; A puede ser vacío ($\emptyset$), llamado conjunto de las aristas que están relacionados mediante la aplicación T.

V= $\{v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , \dots \dots \dots \dots \dots \dots \, , v_9\}$

A= $\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_6), (v_7, v_8), (v_3, v_1), (v_7, v_4), (v_9, v_9)\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots \dots \dots . a_9\}$

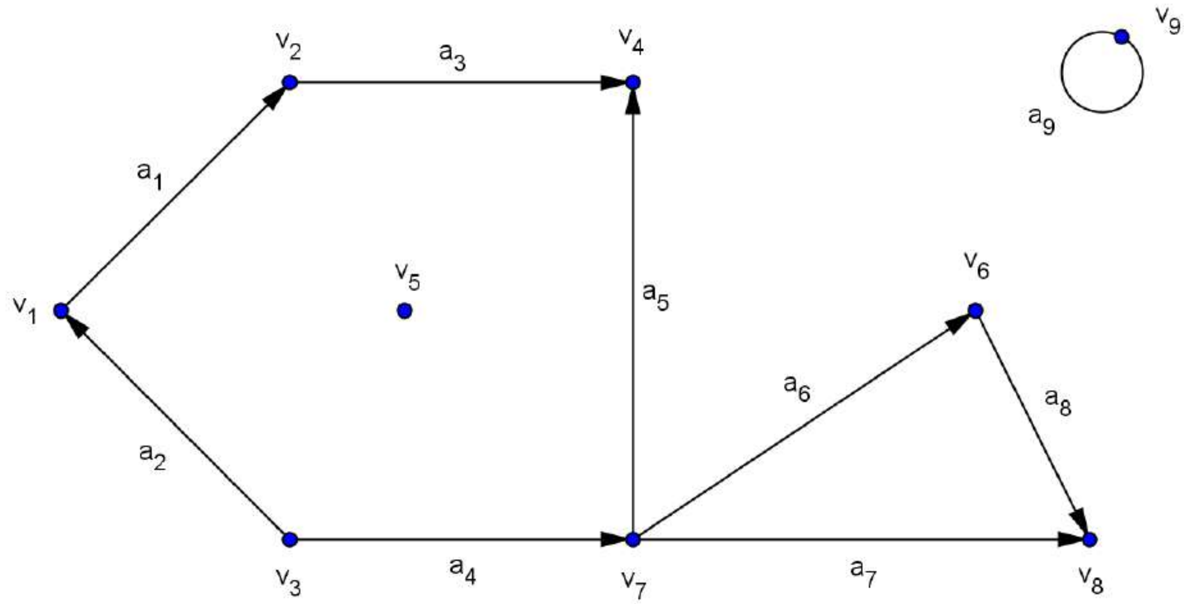
T: $V \rightarrow A$, $v_1 \rightarrow v_j$

$\mathrm{T}: (v_1) = v_1 \to v_2 = a_1$

$\mathrm{T}: (v_5) = \emptyset$

$\mathrm{T}(v_9) = v_9 \to v_9 = a_9$

$\mathrm{T}(v_7) = \{v_7 \to v_6, v_7 \to v_4, v_7 \to v_8\} = \{a_5, a_6, a_7\}$



Definición 1.2. Grafo propiamente tal es aquel grafo que no considera dirección, luego la relación existente es simétrica.

Ejemplo 1.1

1) Relación "Ser hermano de"
2) Relación "Ser paralelo a"

Si $G = (V, A)$ es un grafo entonces la relación T es simétrica, es decir, $(a, b) = (b, a)$

En el diagrama geométrico los nudos o vértices estarán indicados por pequeños círculos y las conexiones mediante arcos o rectas, los cuales pueden tener dirección o no, de donde se generan dos clasificaciones de grafos: Los dirigidos y los no dirigidos.

Definición 1.3. Grafo dirigido es aquel grafo en el cual la relación existente entre los elementos considera su dirección.

Ejemplo 1.2.

1) Relación "Padre e hijo"
2) Relación "Profesor alumno"

Observación 1.1 Se puede recalcar que si $G = (V, A)$ es un dígrafo entonces la relación T, en general no es simétrica; es decir $(a, b) \neq (b, a)$; $\forall a, b \in V$

Observación 1.2 $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$ no dirigido lo llamaremos grafo.

1.5. Tipos de relaciones de un grafo dirigido

1.5.1. Arco

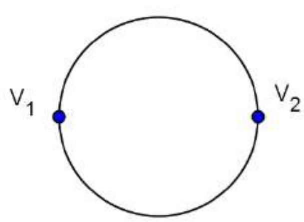
Relación que indica dirección

Ejemplo 1.3.

$a \to b \neq b \to a$;

Entre un punto y otro puede haber más de un arco

Ejemplo 1.4.



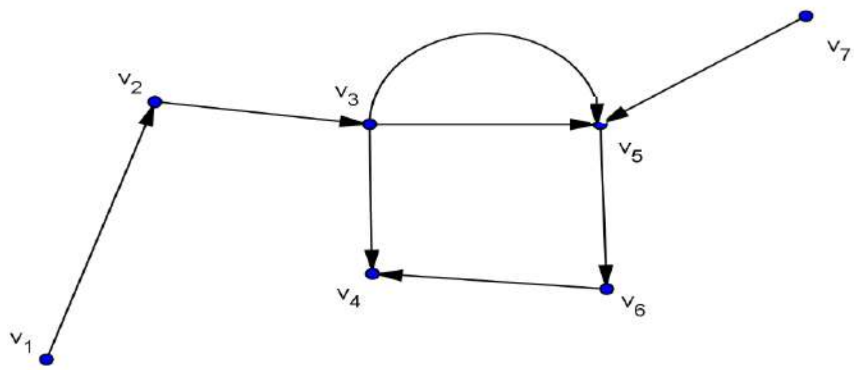
$v_1 \to v_2 \;\; \wedge \;\; v_2 \to v_1$

1.5.2. Camino

Es una ruta que se debe seguir para llegar de un punto a otro. Lo representaremos por $\gamma\ (v_i, v_j)$.

Ejemplo 1.5.

.



Si trazamos el camino $\gamma\ (v_1, v_2)$ y queremos enunciar los puntos por donde debemos pasar, podemos escribir:

$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4)$; Luego $\gamma\ (v_1, v_4)$=$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4)$

Observación 1.3. Entre un punto y otro puede haber más de un camino.

Ejemplo 1.6.

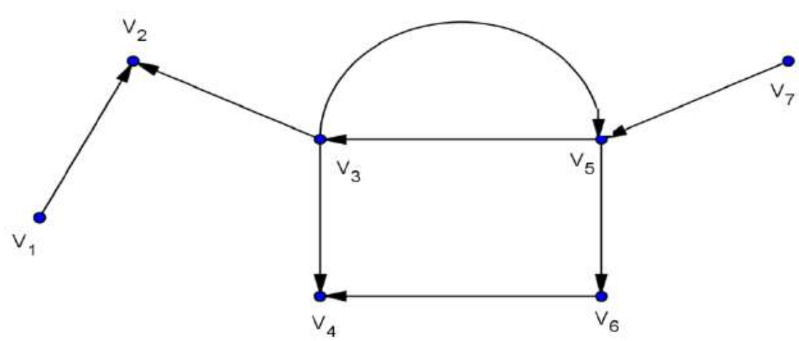
En la figura, para $\gamma(v_1, v_4)$ tenemos:

$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_3, v_4)$ Y $\gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4)$

1.5.2.1. Camino elemental

Es aquel camino que nunca pasa más de una vez por un mismo punto.

Ejemplo 1.7.



En la figura anterior, tenemos los caminos:

$\gamma(v_1, v_4) = \gamma(v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\gamma(v_1, v_4) = \gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4)$

Todos ellos son caminos elementales.

$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_3, v_4)$ No es un camino elemental porque pasa dos veces por el vértice v_3.

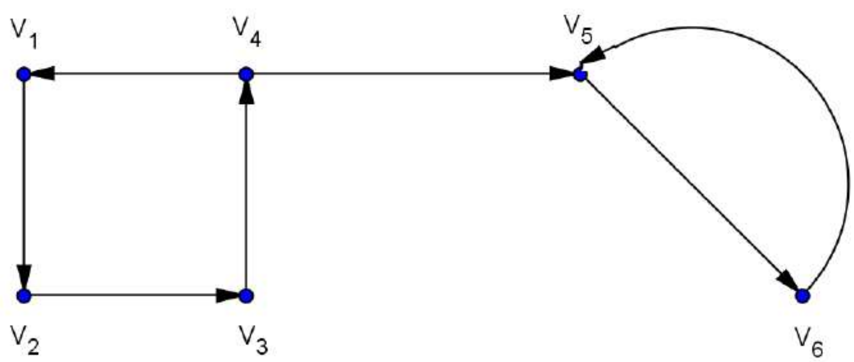
1.5.2.2. Camino compuesto

Es aquel camino que utiliza más de una vez un mismo punto. En la figura anterior: $\gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_3)$ es un camino compuesto.

1.5.3. Circuito

Es aquel camino que vuelve a su punto de origen.

Ejemplo 1.8.



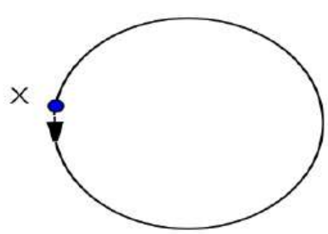
- Todo punto que pertenece a un circuito puede ser punto de partida.
- Todo punto de partida es a la vez punto de llegada.

$\gamma(v_2, v_3, v_4, v_1, v_2) = \gamma(v_3, v_4, v_1, v_2, v_3) = \gamma(v_4, v_1, v_2, v_3, v_4) = \gamma(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$

1.5.3.1. Bucle

Es la conexión de un vértice consigo mismo.

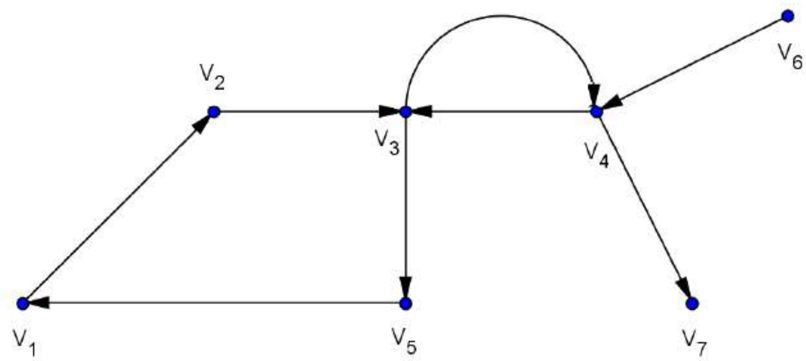
Ejemplo 1.9.



1.5.3.2. Circuito elemental:

Es un camino elemental que vuelve a su punto de partida.

Ejemplo 1.10.



$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_5, v_1)$ y $\gamma(v_3, v_4, v_3)$ son circuitos elementales,
$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4, v_3, v_5, v_1)$ no es circuito elemental.

1.5.3.3. Circuito compuesto

Es aquel camino compuesto que vuelve a su punto de partida.

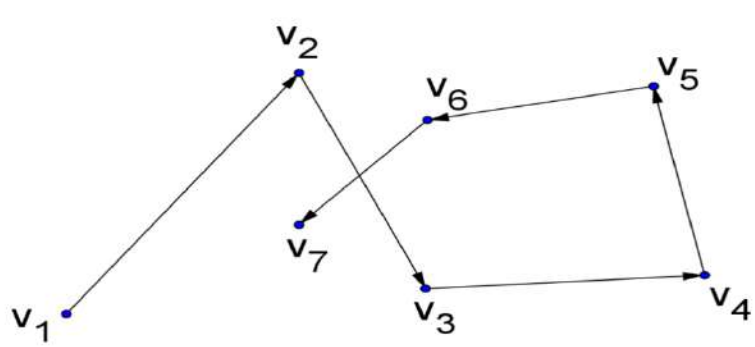
Ejemplo 1.11.

En la figura anterior $\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4, v_3, v_5, v_1)$ es un circuito compuesto.

1.5.4. Camino Hamiltoniano

Es el camino elemental que pasa por todos los vértices del grafo.

Ejemplo 1.12

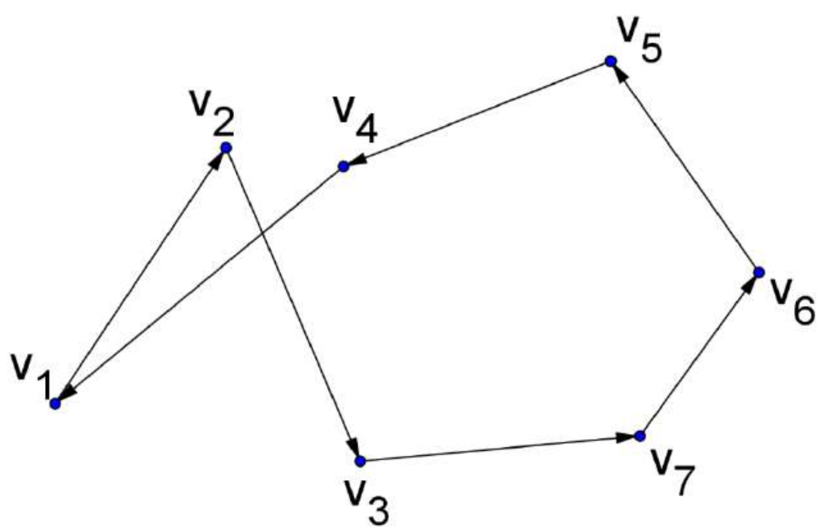


$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7) = \gamma(v_1, v_7)$

1.5.5. Circuito Hamiltoniano:

Es un camino que vuelve a su punto de partida pasando por todos los vértices del grafo.

Ejemplo 1.13.



$\gamma(v_1, v_2, v_3, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1)$, es un camino Hamiltoniano.

1.6. Tipos de relaciones en un grafo

Recordemos que en un grafo no consideramos las direcciones, por lo tanto tenemos:

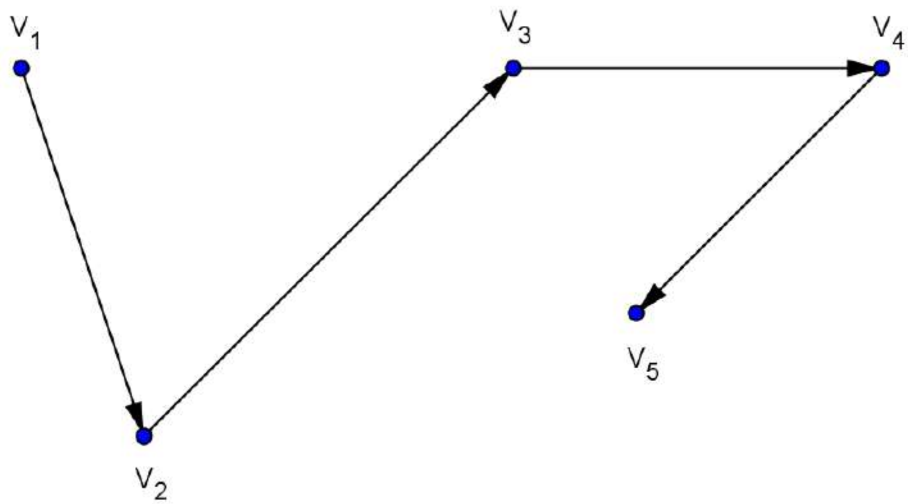
1.6.1. Arista: Se obtiene de un arco si omitimos su dirección.

Ejemplo 1.14:

$v_1 \rightarrow v_2 = v_2 \rightarrow v_1$

1.6.2. Cadena: Se obtiene de un camino al omitir su dirección, la denotaremos por $\delta(v_i, v_j)$; v_i , $v_j \in V$.

Ejemplo 1.15:



$$\delta(v_1, v_5) = \delta(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

1.6.3. Ciclo: Este lo obtenemos de un circuito, también omitiendo su dirección, es decir, es una cadena cerrada.

Observación 1.4.

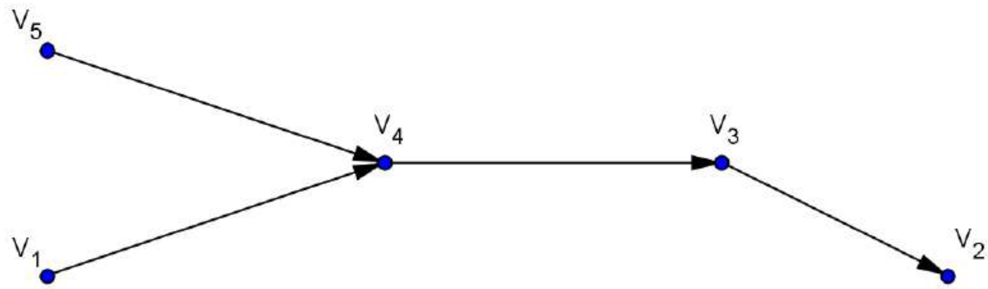
- Todo punto del ciclo puede ser punto de partida
- Todo punto de partida es un punto de llegada.

En resumen, en un grafo debemos cambiar o remplazar el nombre de arco por arista, camino por cadena, circuito por ciclo y el término bucle por lazo.

GRAFO DIRIGIDO (“Con dirección”)	**GRAFO (“Sin dirección”)**
Arco	Arista
Camino	Cadena
Circuito	Ciclo
Bucle	Lazo

1.6.4. Grado de recepción: Es el número de arcos que recibe un punto cualesquiera del grafo dirigido y lo denotaremos por $G_r(V_i)$

Ejemplo 1.6.

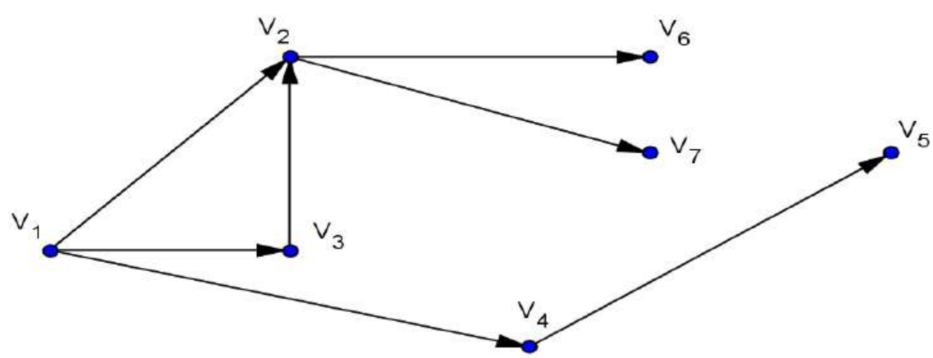


Grado de recepción de v_4 es dos

$G_r(v_4) = 2 \quad G_r(v_5) = 0$

1.6.5. Grado de emisión: Es el número de arcos que salen de un punto determinado del grafo dirigido y lo denotaremos por $G_e(V_i)$

Ejemplo 1.17

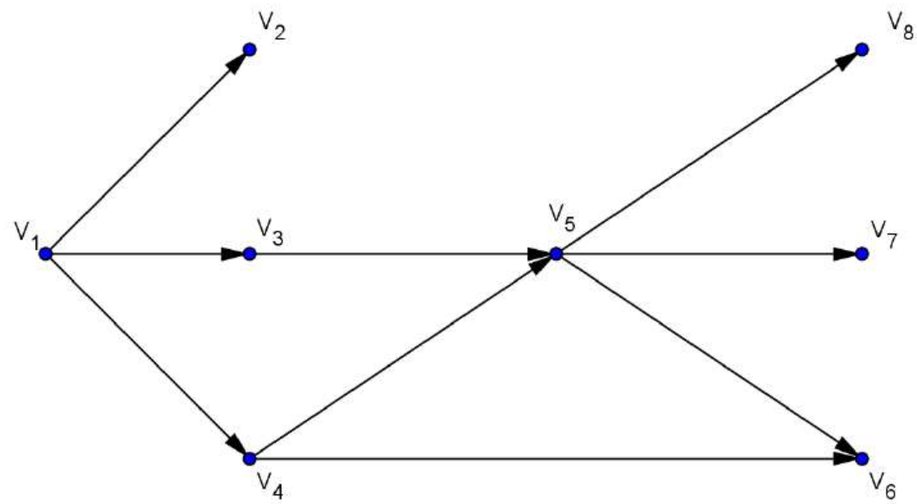


Grado de emisión de v_1 es tres

$G_e(v_1) = 3 \, , G_e(v_2) = 2$

1.6.6. Ramificación: Son los puntos cuyo grado de emisión es mayor que uno.

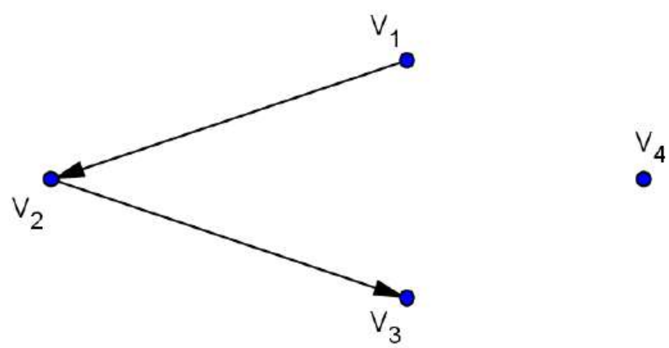
Ejemplo 1.18.



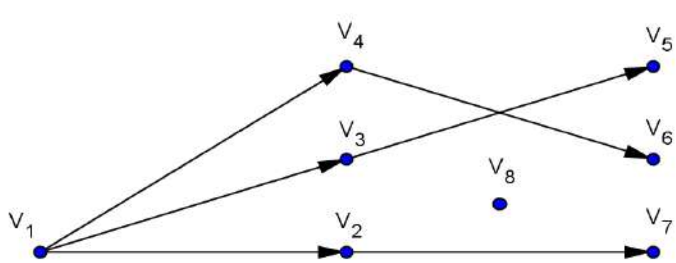
Grado de emisión de V_1 es tres, $G_e(v_1) = 3$; luego v_1 es una ramificación.

1.6.7. Vértice aislado: Es aquel vértice que no incide en ningún lado.

Ejemplo 1.19.



V_4 es un vertice aislado.
1.6.8. Grado local: "$P(v_i)$", también se llama "grado en v_i" y es el numero $P(v_i)$ de



lados que tenga un punto v_i en un grafo.

$P(v_1) = 3; P(v_2) = 2; P(v_7) = 1; P(v_8) = 0$

Observación 1.5. El grado local de un vértice aislado es cero.

Teorema 1.1.

Sea $G = (V, A)$ un grafo. La suma de los grados de los vértices es dos veces el número de aristas, es decir:

$\sum_{i=0}^{n} P(v_i) = 2\ \#A$, donde

A= Aristas y $\# A$ = Números de aristas

1.7. Tipos de Grafos

Es bastante común distinguir entre tres tipos de grafos: los grafos, los multigrafos y los pseudografos.

1.7.1. Multígrafo: Es aquel grafo en donde dos vértices se pueden conectar por más de una arista,

Ejemplo 1.20.

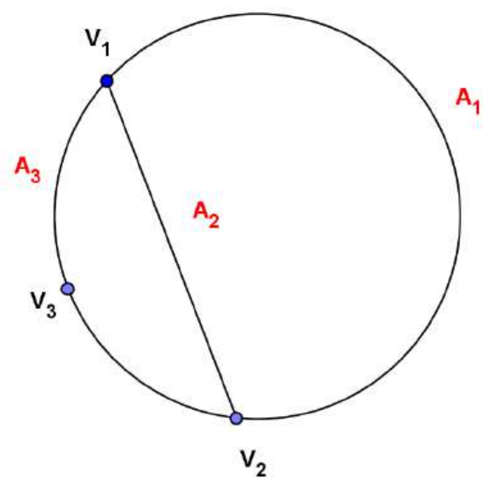
$T: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{A}$

$\mathrm{T}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{A}_1$

$T(V_1) = A_2$

$T(V_1) = A_3$

$T(V_1) = A_n$, entonces es un Multigrafo



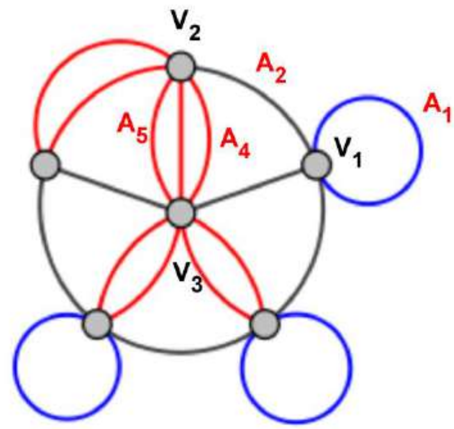
1.7.2. Pseudografo: Es aquel multígrafo en donde al menos exista un bucle (un vértice conectado con si mismo).

Ejemplo 1.21.

$T: V \rightarrow A$

$T(V_1) = A_1$

$T(V_2) = A_4 \quad y \quad A_5$

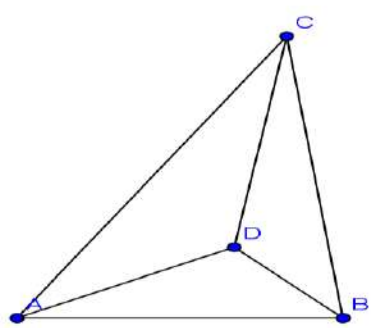


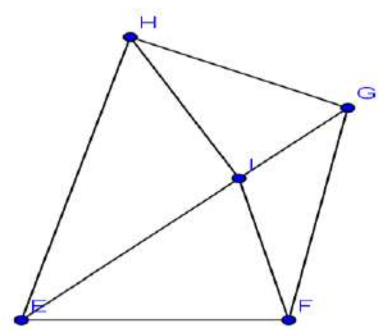
Las curvas azules son los bucles y las curvas rojas muestran que ahí más de una arista uniendo dos vértices.

1.8. Grafos planos

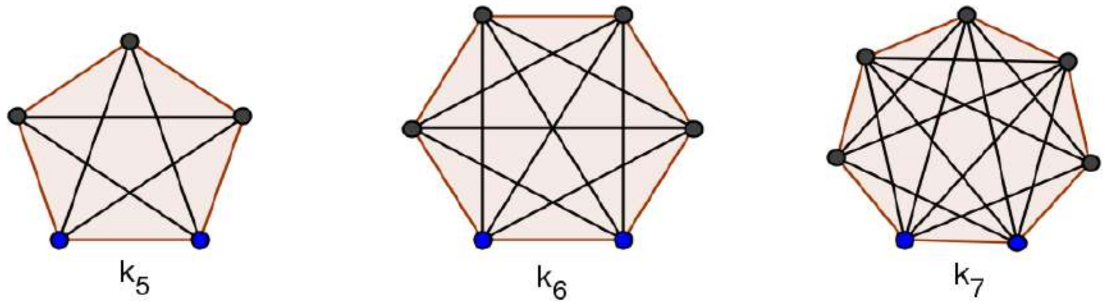
1.4. Definición: Un grafo se dice que es plano si y sólo si existe una representación plana del mismo, de forma que las curvas que representan los arcos se cortan sólo en los puntos que representan a los vértices.

Ejemplos 1.22.





Ahora bien los ejemplos de grafos que no son planos son los siguientes:



Estos últimos tres juegan un papel importante a la hora de determinar si un grafo plano o no plano. Si admitimos que dichos grafos no son planos, está claro que todo grafo que contenga a alguno de ellos como subgrafo no será un grafo plano.

Enunciamos a continuación el conocido teorema de Kuratowski que caracteriza los grafos planos:

Observación *1.6.* Decimos que dos grafos G_1 y G_2 son homeomorfos si ambos pueden obtenerse a partir de un mismo grafo por una sucesión de subdivisiones elementales de aristas. Suele notarse por $G_1 \cong G_2$.

Teorema 1.2. Un grafo es plano si y sólo si no contiene como subgrafo a ningún grafo que sea homeomorfo al k_3, k_5 o a las figuras anteriores.

1.9. Subgrafos

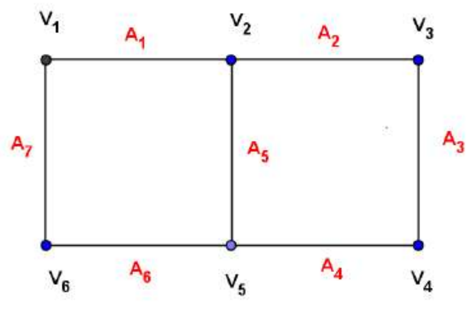
Un grafo es una estructura algebraica y, como tal, tiene interés el estudio de sus subestructuras propias: los subgrafos. Un subgrafo es una parte de un grafo que por sí mismo es un grafo.

Definición1.5. Un grafo $G' = (V', A')$ con una aplicación T', se dice que es un subgrafo del grafo $G = (V, A)$ con una aplicación T, si y solo si se verifican las siguientes tres condiciones:

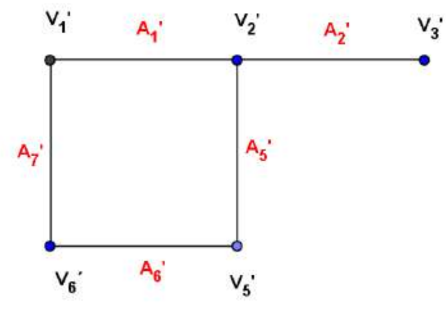
$i)$ $A' \subset A$
$ii)$ $V' \subset V$
$iii)$ $T' = T|\, A'$

Ejemplo 1.23.

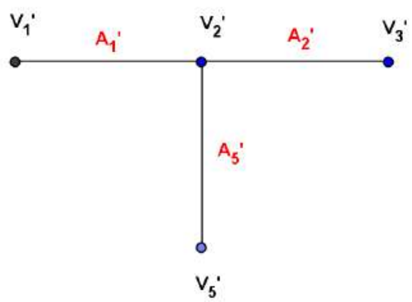
En las siguientes figuras (A),(B),(C),(D) que se muestran, el de referencia es (A) , los otros tres son *subgrafos* de (A), deben escogerse algunos de los vértices y algunas de sus aristas.



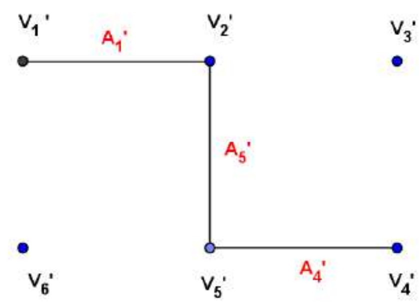
(A)



(B)



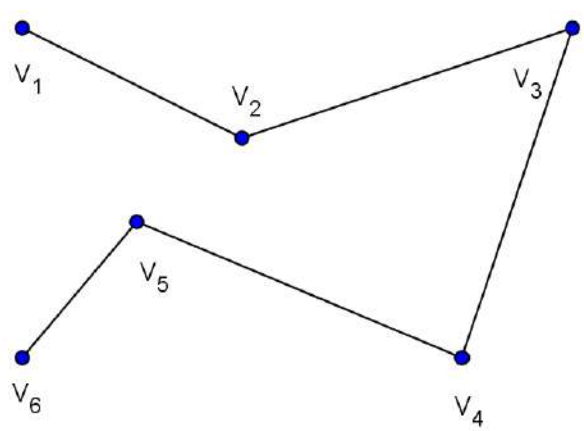
(C)



(D)

1.10. Conexidad

Definición 1.6. Sea $G = (V, A)$ un grafo, G es conexo si y solo si para todo par de vértice u y v de G existe un camino en G que conecta u y v.



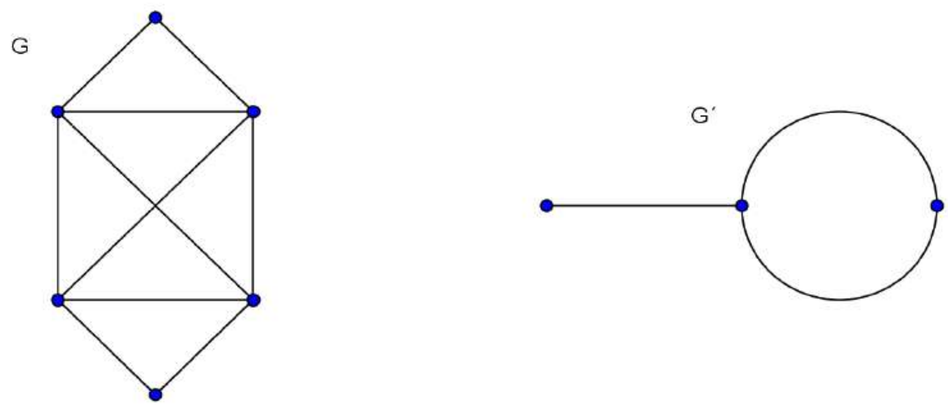
1.11. Grafos Eulerianos

Definición 1.7. Un camino simple que contenga a todos los arcos de un grafo G se dice que es euleriano.

Definición 1.8. Un grafo es euleriano si tiene un camino euleriano cerrado.

Ejemplo 1.24.

Si G y G' son los grafos representados por:

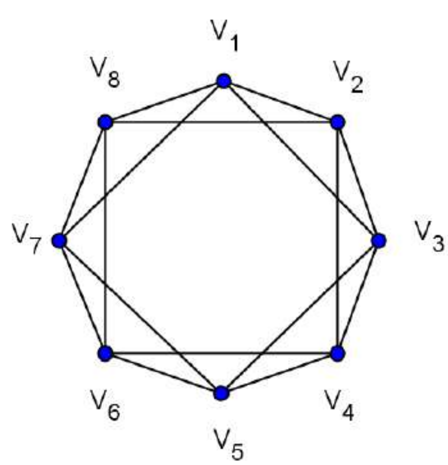


Se verifica que G es euleriano y que G' no lo es.

Teorema de Euler 1.3. Sea $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$un grafo con $A \neq \emptyset$ es un grafo euleriano y sin vértices aislados si y solo si es conexo y todo sus vértices tienen grado par.

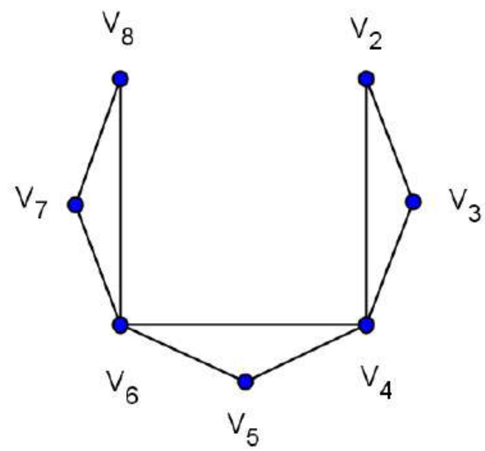
Ejemplo 1.25.

Demostrar que el siguiente grafo es euleriano y hallar un camino euleriano en el.

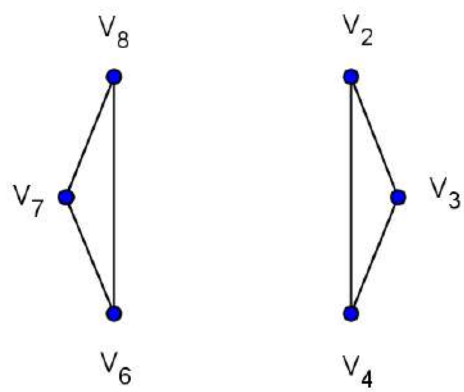


Es Euleriano ya que es conexo y el grado de todos sus vértices es 4.

Partiendo de v_1 consideramos el camino cerrado simple C_1: $v_1, v_2, v_8, v_1, v_3, v_5, v_7, v_1$ y suprimiendo dicho camino resulta el siguiente grafo:



G_1 es conexo y el vértice v_5 esta en G_1 y C_1. Eligiendo el camino C_2:$v_5 . v_6, v_5$ y suprimiéndolo resulta:



G_2 posee dos componentes conexas G_2' y G_2''. Eligiendo el vértice v_6 en G_2' y el v_4 en G_2'' y los caminos C_3: v_6,v_8,v_7,v_6 y C_4: v_4, v_3, v_2, v_4 y utilizando el procedimiento descrito en la demostración anterior, el camino euleriano resultante es

$$C: v_1, v_2, v_8, v_1, v_3, v_5, v_6, v_8, v_7, v_6, v_4, v_3, v_2, v_4, v_5, v_7, v_1$$

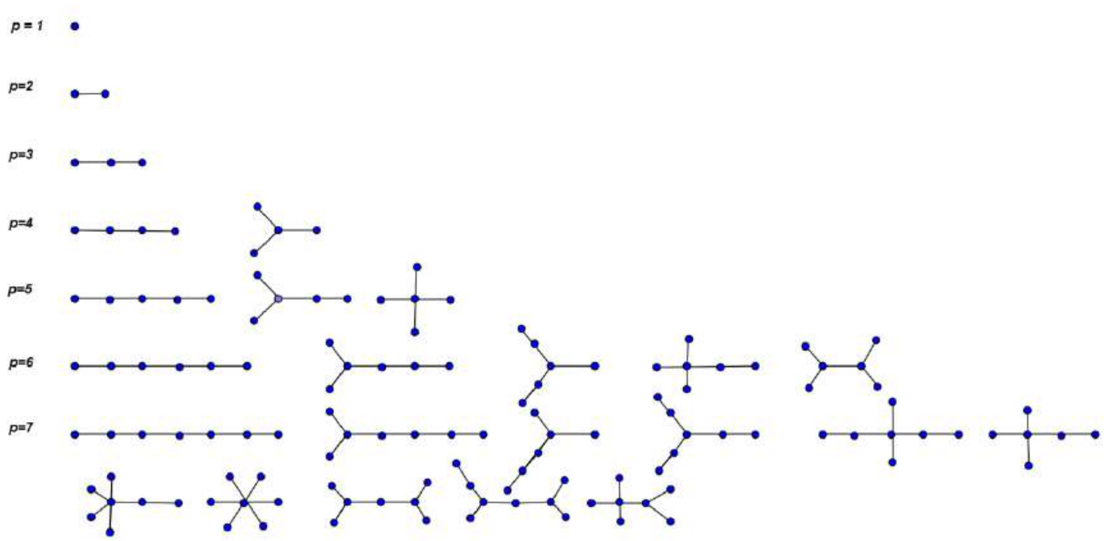
Teorema 1.4. Sea G un grafo conexo. G tiene un camino euleriano no cerrado si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

1.12. Árboles

Definición 1.9. Un grafo G se dice que es un árbol si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

i) G es conexo.
ii) G no posee ciclos.

Es inmediato probar que si un grafo G no tiene ciclos, es unión disjunta de árboles (es decir, todas sus componentes conexas son árboles). A los grafos que no poseen ciclos se les llama bosques.



Corolario: Un grafo G es un árbol si, y sólo si para todo par de vértices distintos, *u* ,*v* de G, existe un único camino simple de extremos *u* y *v.*

Definición 1.10. Un arco *a* de un grafo G se dice que es un puente si al suprimir el arco *a* en G se obtiene un grafo con más componentes conexas que G.

Teorema 1.5. Si G es un grafo, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) G es un árbol
ii) G es conexo y todos los arcos son puentes
iii) G no posee ciclos y si se añade un arco a G entonces G posee un único ciclo.

CAPÍTULO 2
APLICACIONES

2.1. Introducción

En el presente capítulo se introducirán aplicaciones que se pueden representar a través de la teoría de grafos y sus propiedades, aplicaciones tales como de optimización de tiempo u otros, mapas y colores, sistema P.E.R.T, redes eléctricas, circuitos computacionales, etc.

2.2. Grafos y colores

2.2.1. Mapas y colores: El enigma de los topologos.

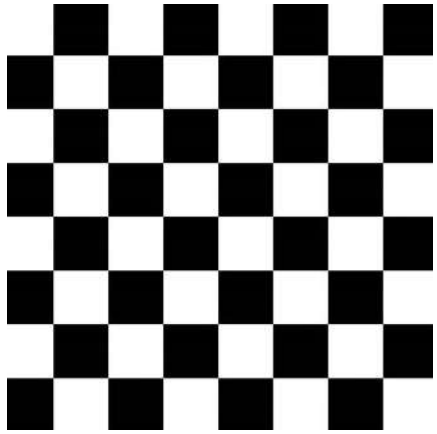
Los mapas siempre han fascinado a los topologos en virtud de ciertas cualidades que poseen. Al colorear un mapa geográfico, se acostumbra a asignar diferentes colores a dos regiones que tienen una porción de frontera que le es común. Se ha encontrado empíricamente, que cualquier mapa independiente del número de regiones que contenga y cómo éstas estén situadas. La mayoría de los mapas geográficos pueden interpretarse como grafos en lo que los vértices son los puntos de confluencia de tres o más líneas y las aristas son las líneas delimitantes de cada territorio o zona. Una interrogante para los topologos ha sido: ¿Cuál es la mínima cantidad de colores necesaria para colorearlo de forma que zonas con frontera común tengan colores diferentes?

¿Cómo deben ser los mapas que son coloreables con tan sólo 2 colores? ¿Y con 3 colores? estas no presentan mayor dificultad.

Teorema 2.1 Un mapa es coloreable con dos colores si y sólo si su grafo asociado tiene todos sus vértices con grado par y mayor o igual que dos.

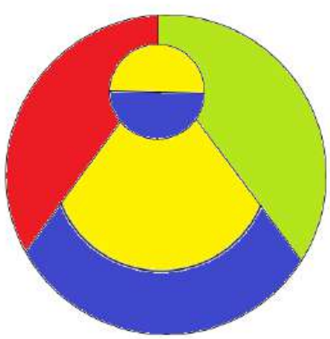
Si el mapa se colorea con dos colores los vértices de su grafo tienen grado par, pues si hubiese un vértice con grado impar al menos una cara lindaría como mínimo con dos caras más y, por lo tanto, Se precisarían tres colores.

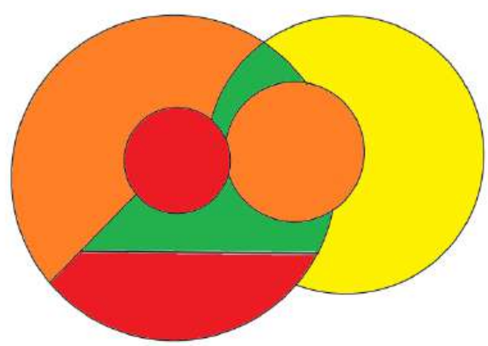
Un ejemplo de plano coloreable de dos colores es el tablero de ajedrez.



2.2.2. Cuatro colores son suficientes:

Es fácil ver que un número menor de colores no es suficiente para todos los casos como lo muestran los siguientes diagramas:





Las regiones no pueden colorearse con menos de cuatro colores ya que cada región tiene frontera con las otras tres.

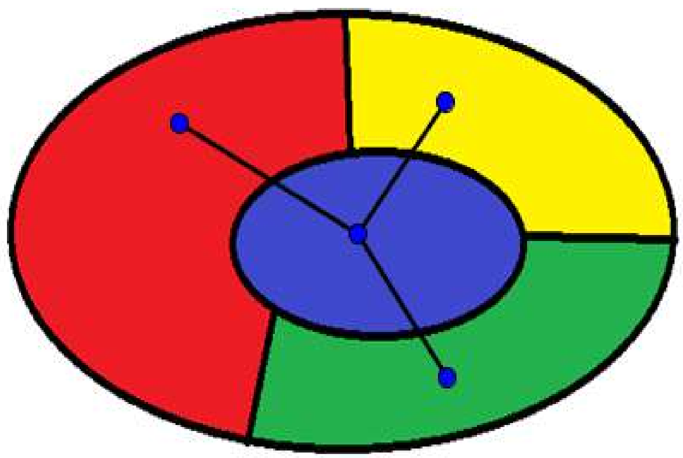
El caso de un mapa plano o uno esférico es lo mismo ya que cualquier mapa en una esfera puede transformarse en un mapa plano, agujereando la esfera y aplanándola.

El teorema de los cuatro colores, fue uno de los más famosos problemas no resueltos por la matemática. Fue planteado por primera vez en 1852. Kempe publicó una demostración en el año 1879, la cual contenía un error de razonamiento.

Finalmente el problema de los cuatro colores fue resuelto por K. Appel y W. Haken en 1976. Su demostración, que les ocupó 4 años y una considerable cantidad de tiempo de computadoras.

Teorema 2.2 Un mapa plano es coloreable como mínimo con cuatro colores.

Ejemplo: La forma más simple de ver esto es trazar cuatro regiones en forma tal que cada una esté unida con la otras tres.



Cada una de las tres regiones o áreas exteriores requiere su propio color, y el centro debe tener otro.

Existen casos en que se requieren cinco y más de 5 colores, por ejemplo:

i)Mapas en donde las regiones se subdividan y no se deben solapar.
ii) Un mapa trazado en una cinta de Möebius requiere seis colores.
iii)Un mapa enrollado de forma de rosquilla (topología), en el plano se necesitaban cuatro ahora necesita siete colores.

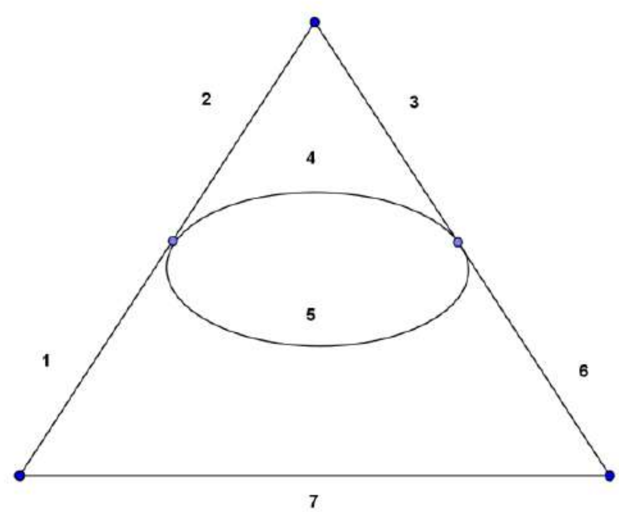
2.3. Optimización

Quiero conseguir que aterrice un hombre en la luna y que vuelva sano y salvo a la tierra, y que se lleve a cabo dentro de esta década. John F. Kennedy, 25 de mayo de 1961.

En la segunda mitad del siglo xx la teoría de grafos, adquirió una nueva dimensión al formar parte de muchas aplicaciones relacionadas con la planificación y la optimización. El gran programa de la Nasa para el lanzamiento del Apolo II, la recogida de basuras y la limpieza en grandes ciudades, las cadenas productivas y distribución de automoviles o de alimentos, buscaron métodos convenientes para proponer buenas soluciones. La investigación operativa brilló con esplendor y la teoría de grafos suscitó un interés que aún sigue vigente.

2.3.1. Circuitos Eulerianos

Dado un grafo conexo hallar un circuito euleriano, esto es encontrar si es posible encontrar un camino que permita partir de un vértice del grafo y regresar a él recorriendo todas las aristas del grafo una sola vez.

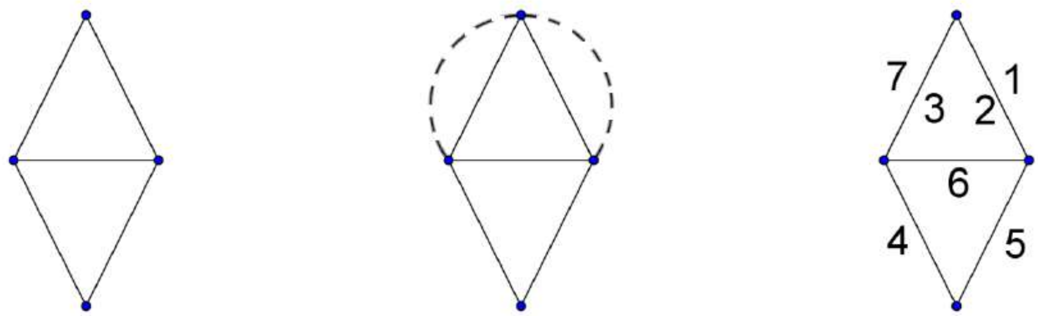


El camino es siguiendo las aristas 1,2,3,4,5,6,7 .

Recordando el teorema de Euler, donde un grafo conexo contiene un circuito Euleriano si y sólo si todos los vértices tienen un grado par de vértices.

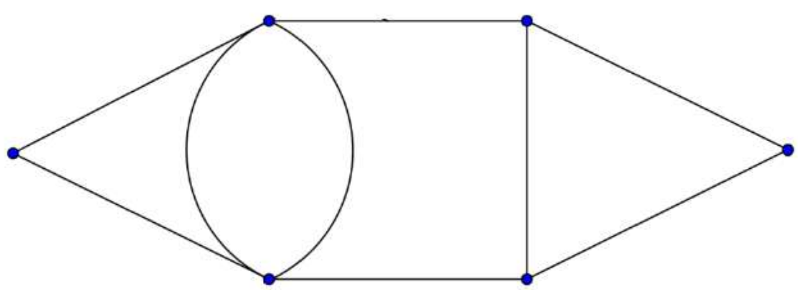
En los grafos donde existan vértices con grado impar no es posible un circuito euleriano, pero se puede introducir una nueva arista para transformarlo en un circuito euleriano. Este método sirve para resolver uno de los problemas que se presentará a continuación, lo cual se denomina “eulerizar un grafo”.

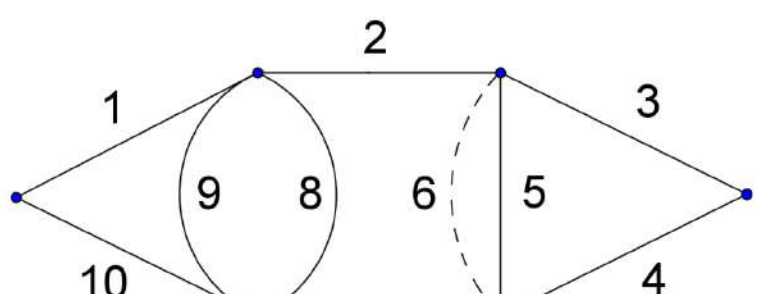
Ejemplo 2.1 En las figuras se muestra una Eulerización posible y la trayectoria final.



2.3.2. El problema del cartero chino

La ruta ideal de un cartero inteligente que desea hacer bien su trabajo será aquella calle sólo debe recorrer una vez. Si al recorrido de calles se asocia el grafo correspondiente entonces lo ideal es buscar el circuito Euleriano. Pero si no existe, deberán repetirse algunas calles procurando hacer las mínimas repeticiones. Esto fue estudiado por el matemático Chino Meigu Guan en 1962, se ha popularizado con el nombre de “El problema del cartero chino”.



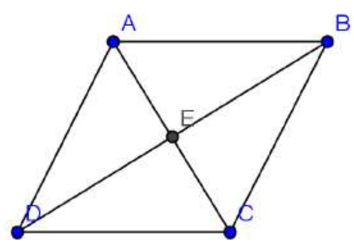


En la segunda figura puede notar que con el truco de introducir tan sólo una nueva arista ya tiene un circuito Euleriano con la trayectoria indicada, en la que únicamente una calle se recorre dos veces (5 y 6).

Este método se puede utilizar en otros contextos como en las empresas que deben distribuir sus productos y quieren minimizar los recorridos y los tiempos empleados en estas labores, entre otros.

2.3.3. Circuitos Hamiltonianos

Considérese en un grafo conexo el siguiente problema: ¿Se puede hallar un recorrido, partiendo de un vértice, en que a través de algunas aristas permita pasar por todos los vértices una sola vez y regresar al vértice de partida? Si este recorrido es posible se le denomina *circuito Hamiltoniano.*



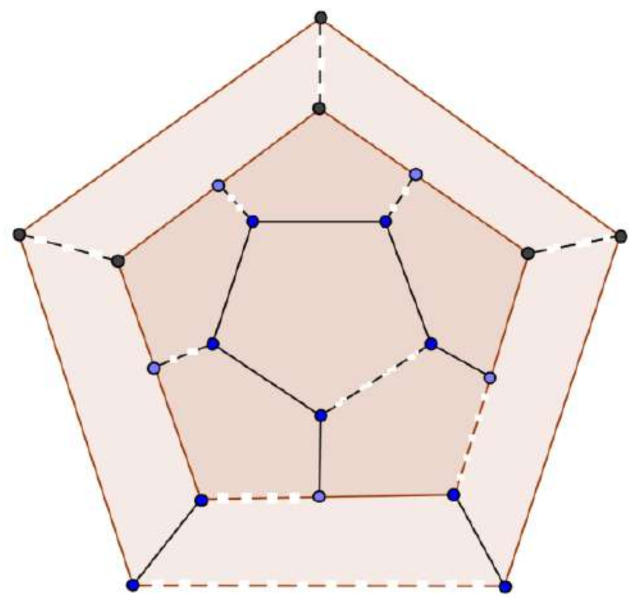
En la figura anterior el trayecto DABCED sería Hamiltoniano, los circuitos Hamiltonianos lo que no puede repetirse son los vértices, cosa que el circuito Euleriano si se puede.

A pesar de la dificultad que presentan los grafos grandes para determinar circuitos Hamiltonianos, el problema es de gran interés para la organización de viajes, para las recogidas de todo tipo, para la distribución de mercaderías en los supermercados, etc.

2.3.4. Invento de dos Guineas

Si bien la idea inicial de estos circuitos en grafos se debe a Thomas Kirkman (1806-1895), el matemático que los popularizó e investigó fue el irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865).

En 1859 Hamilton tomó un dodecaedro puso nombres de ciudades en los vértices y planteó el juego de hallar un recorrido sobre este, que partiendo de una cuidad debe regresar a la misma habiendo visitado las otras 19 ciudades una sola vez. Entusiasmado con su juego, "vendió" la idea a un fabricante de juguetes el cual le abonó 2 guineas (La guinea era una moneda de oro que se utilizó en Gran Bretaña, antes de que adoptase el sistema decimal en 1971, de poco valor).

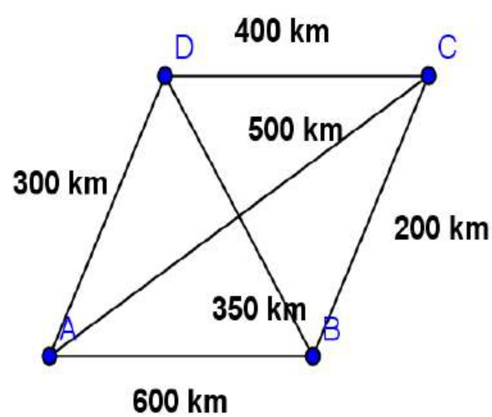


En la mayor parte de las aplicaciones no sólo se tiene el grafo, sino que hay valores asociados a las aristas (coste del desplazamiento, kilómetros) y, por lo tanto, no se desea únicamente hallar un circuito, sino minimizar costes o tiempo o kilometraje. Piénsese en el cartero, el viajante y regresar a casa haciendo el mínimo recorrido. Y cuando usted organiza sus vacaciones esta cuestión también es de su interés (puede querer realizar desplazamientos en el menor tiempo posible, o con el mínimo coste aunque sean más largos, etc.)

La complejidad de resolver el problema del viajante para grandes grafos hace de él un caso emblemático de los denominados problemas NP- completos, es decir, se considera que nunca será posible encontrar un algoritmo "rápido" para obtener soluciones óptimas.

2.3.5. Algoritmo del viajero

Imagine que ABCD son ciudades y los números de las aristas son kilómetros y usted parte de A. Tiene tres alternativas de 300 km, 500 km y 600 km; elija la más cercana, D. De ahí tiene las opciones de 350 km y 400 km; elija la más cercana, B. Desde B debe ir a C y luego regresar a A. Éste es un tipo de los llamados algoritmos avaros pues, paso a paso, se escoge la opción más avariciosa (menor coste, menor tiempo, menor distancia). Este algoritmo es una forma de ordenar una ruta pero no garantiza que globalmente dé siempre la solución óptima. Una alternativa es la del algoritmo de las aristas clasificadas, en el que las aristas que se van añadiendo en la determinación del circuito son elegidas en orden de incremento de pesos, evitando añadir circuitos que impidan tener el recorrido Hamiltoniano.



2.3.6. Grafos y planificación: el sistema P.E.R.T

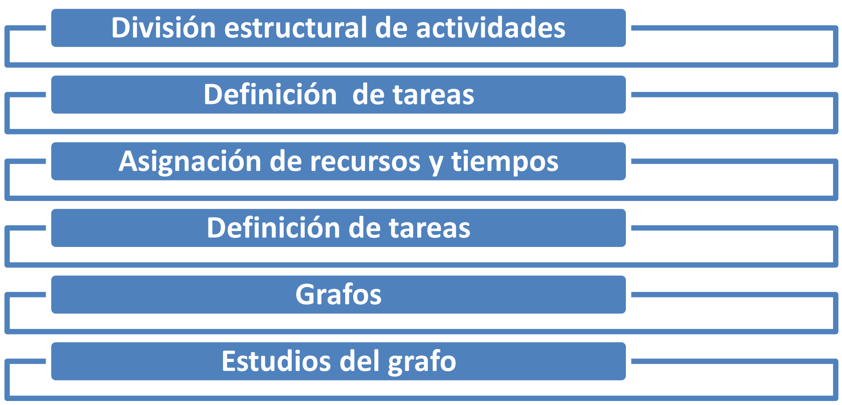
A partir de la Segunda Guerra Mundial se desarrolló una extensa gama de métodos destinados a la optimización de planificaciones. Fue el lanzamiento del Sputnik soviético el que motivó a los estadounidenses a iniciar grandes proyectos, desde el Polaris de misiles balísticos lanzados desde submarinos hasta la llegada del hombre a la Luna. Y grandes proyectos exigían métodos adecuados de planificación. Dichos métodos configuran el llamado análisis de mallas, entre los más importantes están:

1. P.E.R.T. (Program Evaluation and Review Technique), es decir, Técnica de Revisión y Evaluación de Programa. Fue desarrollado por la Marina de

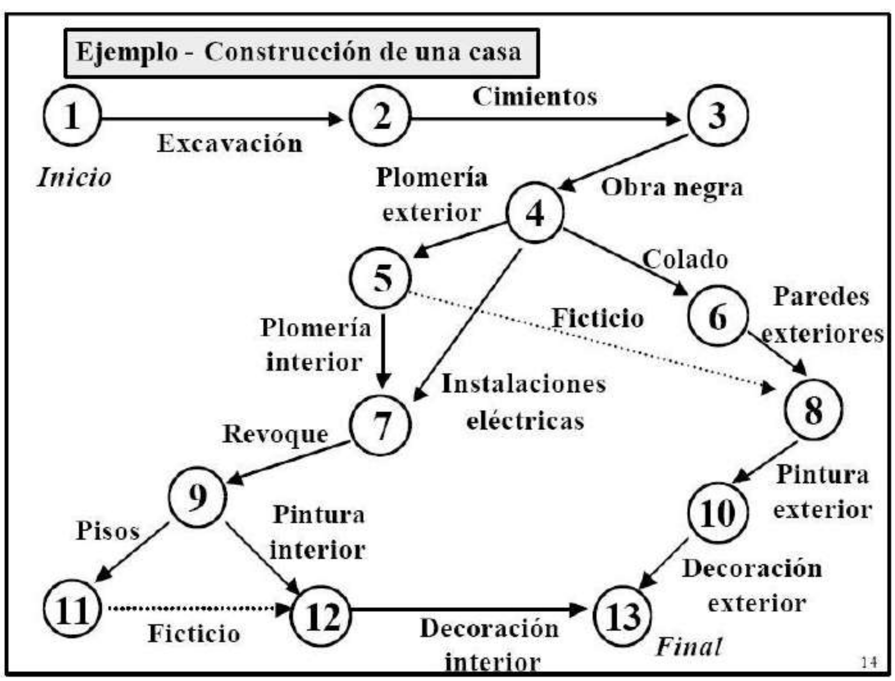
Estados Unidos en 1958 y ha demostrado ser de gran interés en las planificaciones complejas de tiempos y costos.

2. C.P.M.(Critical Path Method). Este método fue especialmente aplicable a planificaciones temporales y al estudio de caminos críticos o series de actividades coordinables que podían afectar con retrasos a la buena marcha de la planificación.
3. R.A.M.P.S (Resource Allocation and Multi-Project Scheduling). Este método amplía el P.E.R.T y se aplica especialmente a la distribución de recursos limitados entre varios proyectos independientes.

Organigrama de la realización de un P.E.R.T



Una aplicación de los sistemas P.E.R.T es la construcción



2.4. Grafos y Geometría

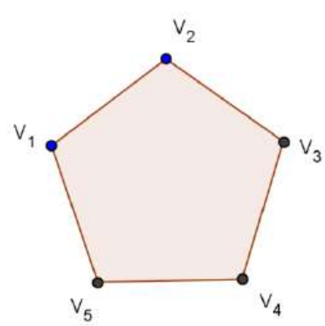
La inspiración es tan necesaria en geometría como en poesía
Alexander Pushkin

Muchas propiedades que se estudian en geometría dependen de las medidas de los objetos: ángulos, distancias, perpendicularidades, superficies, volúmenes, etc. Sin embargo, las consideraciones típicas de la teoría de grafos y la topología también han ayudado a aclarar hechos geométricos que no dependen tanto de las mediciones como de la configuración en sí. La fórmula de Descartes de 1640 y la fórmula de Euler de 1752, al basarse sólo en caras, vértices y aristas, eran aplicables a muchas figuras diferentes y seguían siendo válidas al hacer determinadas deformaciones. Ello daría pie a una nueva rama de la matemática la topología que adquirió gran desarrollo en el siglo XX.

De forma resumida, podría decirse que la topología se libera de las estructuras rígidas de la geometría euclidiana, o de la geometría proyectiva, y al permitir “deformaciones continuas” logra modelizar un nuevo mundo de formas y usar nuevas categorías de transformaciones. Imagine un triángulo dibujado en la superficie de un globo. Al apretar el globo (sin hacerlo estallar) el triángulo adquiere formas diversas en las cuales variarán ángulos y longitudes, aunque la “esencia triangular” de figura determinada por tres puntos y tres líneas entre ellos se mantendrá. El hecho de pensar en figuras de goma que se puedan deformar es un buen recurso visual para pensar topológicamente. Por ejemplo una esfera nunca dará por deformaciones un Donut, pero Donut (con agujero) es equivalente a una taza de café.

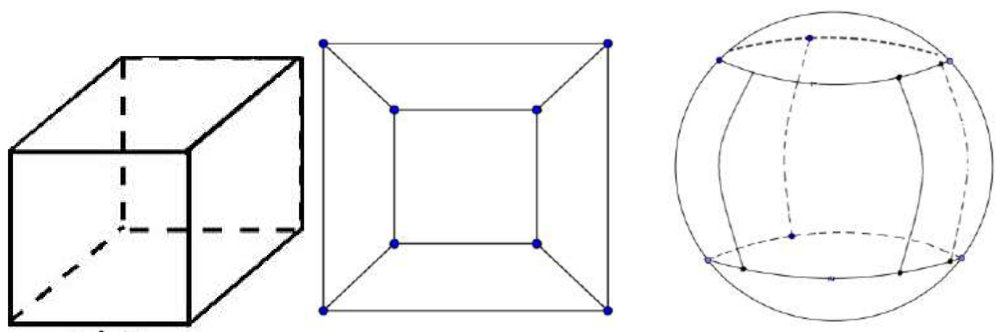
2.4.1. Fórmula de Euler

Considérese un polígono convexo con sus *n* vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ y las correspondientes aristas $v_1v_2, v_2v_3 \dots, v_{n-1}\ v_n\ , v_nv_1$



Al margen de las longitudes de los lados, de los ángulos, de la rectitud de las aristas, etc. Una relación que siempre vale es que el número de aristas es igual al número de vértices. Si mantiene los vértices y entre los correspondientes sustituye la arista recta por cualquier curva simple, la relación vértices /aristas se mantendrá.

Ahora en $\mathbb{R}^3$, consideremos un poliedro convexo cualquier determinado por V vértices, A aristas y C caras poligonales. Si desde un punto interior se proyecta el poliedro en una esfera grande que lo incluya, en dicho esfera quedan marcadas las líneas y los vértices correspondientes, de forma que los valores de V, A y C mantendrán en la configuración esférica.



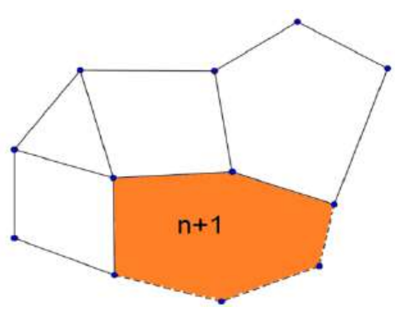
También puede hacerse corresponder el poliedro con un mapa poligonal que tenga el mismo número de aristas A, el mismo número de vértices V y C caras.

Entonces puede observar inductivamente que si $C = 2$ se tiene un polígono y $V = A$, o lo que es lo mismo, $C + V = A + 2$.

Si con $C = n$ se tienen v_n vértices, A_n aristas y se supone inductivamente que:

$$n + v_n = A_n + 2$$

Entonces con $C = n + 1$ deberá fijarse la cara la $n + 1$.
Esta configuración se obtiene al añadir una cierta cantidad de k vértices y k + 1 aristas a un mapa con n caras, v_n vértices y A_n aristas.



Por lo tanto:

$$C + V_{n+1} = n + 1 + V_n + \mathrm{K}$$
$$= (n + V_n) + (\mathrm{k} + 1)$$
$$= (A_n + 2) + (\mathrm{k} + 1)$$
$$= (A_n + \mathrm{K} + 1) + 2$$
$$C + V_{n+1} = A_{n+1} + 2$$

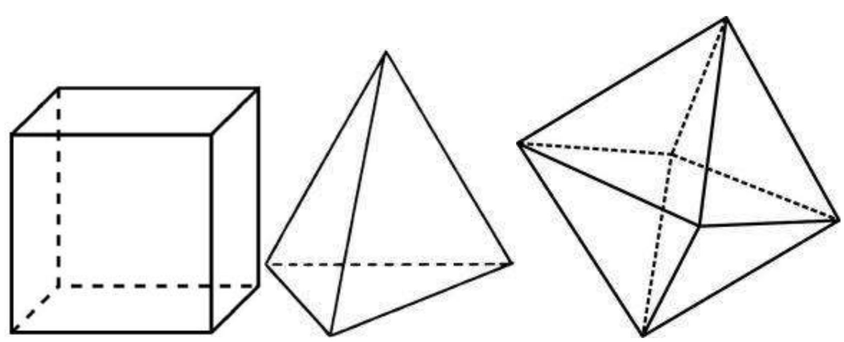
Teorema 2.3 En todo poliedro convexo se cumple la relación $\mathrm{C} + \mathrm{V} = \mathrm{A} + 2$

Observación 2.1 Esta relación se cumple para cualquier poliedro convexo, no importa ni el tipo de caras, ni los ángulos, en las caras poligonales, ni los ángulos entre los planos de las caras, ni las longitudes de las aristas.

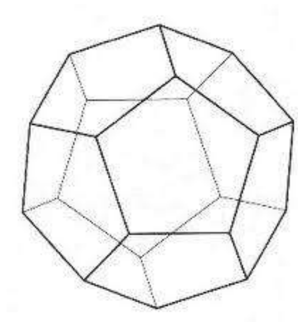
2.4.1.1. Los Grafos de los poliedros regulares

La alternativa a dibujar en perspectiva los únicos poliedros regulares son: el tetraedro, el octaedro, el icosaedro, el cubo y el dodecaedro, es dibujar sus grafos correspondientes.

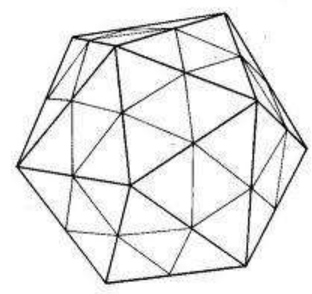
Así queda establecida la fórmula de Euler, que dice lo siguiente:



Cubo **Tetaedro** **Octaedro**

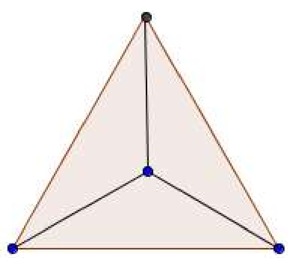


Dodecaedro

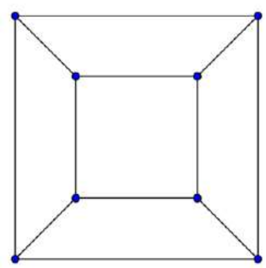


Icosaedro

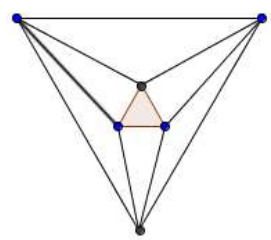
Las siguientes figuras poseen la tabla de los valores de Vértices (V), caras (C) y aristas (A).



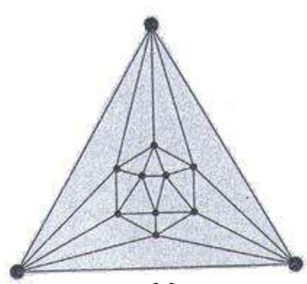
(T)



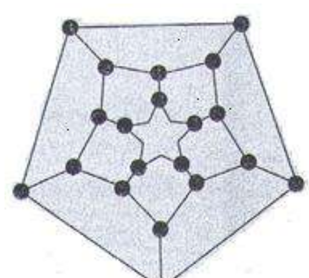
(C)



(O)



(I)



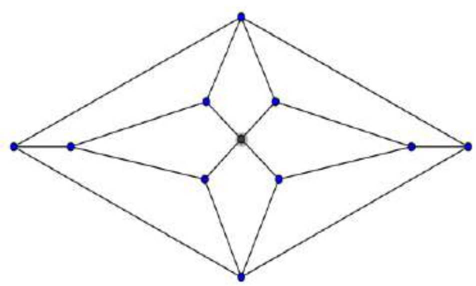
(D)

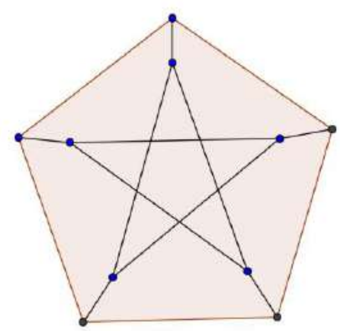
V	A	C	Poliedro	Abreviación
4	6	4	Tetraedro	(T)
8	12	6	Cubo	(C)
20	30	12	Dodecaedro	(D)
6	12	8	Octaedro	(O)
12	30	20	Icosaedro	(I)

Verifique que se cumple la fórmula de Euler $\mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + \mathbf{2}$, para los grafos de los poliedros regulares.

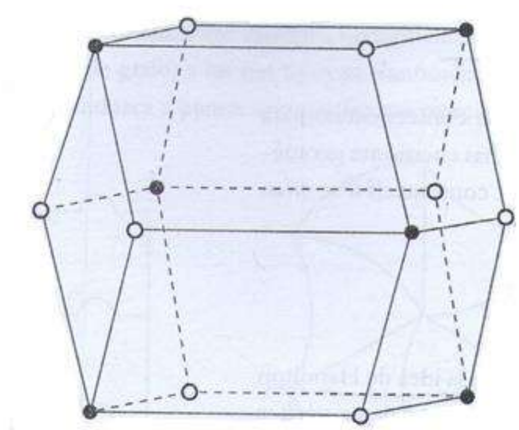
2.4.2. Circuitos de Hamilton en poliedros

Anterior vimos el circuito Hamiltoniano, el cual consistía en partir de un vértice y regresar a él habiendo pasado por todo los vértices una sola vez, ahora el juego es hallar el circuito en un dodecaedro. Esto motivó que años más tarde se buscaran circuitos Hamiltonianos en todo tipo de poliedros, en el caso que no lo hubiera, que se demostrará que no existían. En las siguientes figuras pueden verse los llamados grafos Herschell y Peterson, que siendo simples no admiten circuitos Hamilton.





Ahora si nos vamos a $\mathbb{R}^3$ y buscamos un poliedro que sea Hamiltoniano. Un caso que resolvió Coxeter de forma muy inteligente fue el del rombododecaedro. Un rombododecaedro tiene todas sus caras iguales, pero en cambio tiene vértices de dos tipos diferentes; por este motivo no es un poliedro regular.



Este interesante poliedro representado en la figura tiene 12 caras iguales que son paralelogramos, con la peculiaridad de que posee 8 vértices que reciben 3 aristas(los marcados con círculos blancos) y otro 6 que reciben 4 aristas (las marcados con círculos negros). Obsérvese que los vértices blancos determinan un cubo y, por lo tanto, puede pensarse en el rombododecaedro como un cubo al cual se han añadido seis pirámides de base cuadrada. Así, el volumen de la figura es el doble del cubo inscrito y dicha figura, como el cubo, puede llenar todo el espacio por repetición. Entonces;

¿Existe un circuito de Hamilton en el rombododecaedro?

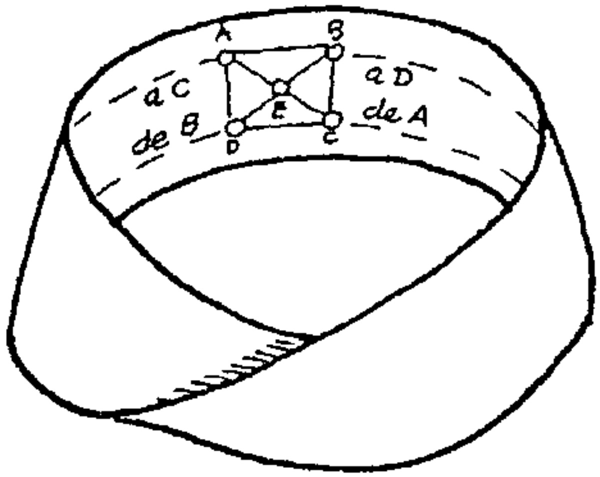
Ésta pregunta la resolvió Coxeter, el cual respondió con un rotundo no; ya que si hubiese un circuito de Hamilton, partiendo y acabando en un vértice, deberíamos recorrer los 14 vértices una sola vez, pero cada vez que se va de uno a otro hay un cambio de color. Esta alternativa de colores en el recorrido no es posible pues hay 6 vértices negros y 8 blancos.

2.4.3. Grafos en superficies no planas

Los grafos en diferentes superficies han ayudado a la formulación de muchas propiedades topológicas que son invariantes por deformaciones continuas y ayudan a clasificar curvas y superficies. Como hemos dicho antes, si se empieza apretar un globo deformándolo (sin romperlo) se observará que las características del grafo se mantienen (número de aristas, y vértices). Otro ejemplo de grafo situado en una superficie muy peculiar es el de la cinta de Möbius. En el plano, si se tienen cuatro puntos y se requiere trazar un grafo que una cada uno de los puntos con los otros tres y que sea plano, no hay dificultad, pues colocando los cuatro puntos como vértices de un cuadrilátero, uniendo dos opuestos por una diagonal y los otros dos, por una línea exterior al cuadrilátero, el problema queda resuelto. Pero con cinco puntos ya no es posible unir cada uno con los otros cuatro puntos sin que se produzcan cruces indeseables entre las aristas. La cinta de Möbius se puede representar mediante una tira larga rectangular de papel, pegando los dos lados cortos después de haber girado en el espacio la cinta antes de pegarla. Si no se gira y uno se limita a pegar los lados paralelos obtendría un cilindro, pero gracias a su construcción la cinta de Möbius tiene la particularidad de tener una sola cara. En el cilindro, el espacio queda dividido en una parte interior y otra exterior, pero en la cinta esto no pasa: no hay dos caras, sino una.

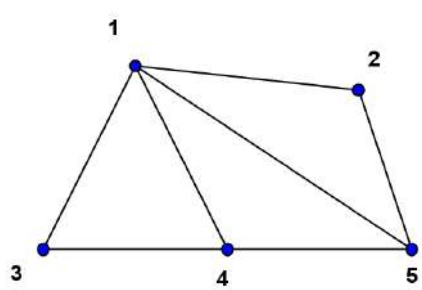
¿Es posible dibujar un grafo en esta superficie, con cinco puntos y cada punto unido con los otros cuatro?

El siguiente esquema de Miguel de Guzmán demuestra que lo que fue imposible en el plano, es posible en la cinta de Möbius.



2.4.4. Geometrías finitas

Imagine una plantación con diversas filas de árboles o de vegetales. El esquema geométrico con que usted lo representaría esta situación es evidentemente un grafo formado por una serie de puntos, sin arista. Pero suponga que deben planearse los vuelos de una avioneta que fumigue bien todo lo plantado, o que son uvas que una máquina ha de recoger, etc. Las posibles "aristas" del grafo servirían ahora para pensar en trayectorias posibles de fumigación o recogida. Muchos son los problemas que han suscitado el interés por las geometrías finitas, es decir, los sistemas geométricos en los que sólo hay un número finito de puntos y unas líneas que consisten en ciertas colecciones de estos puntos.

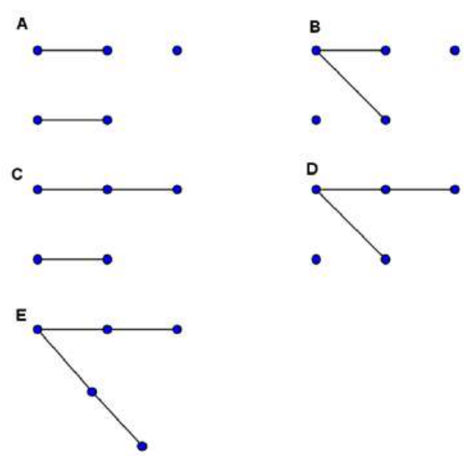


En las figura anterior se representa mediante un grafo una geometría finita que consiste en cinco puntos 1,2,3,4,5 y las líneas formadas por los puntos:{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,5},{3,4,5}.
Como ya puede apreciar en este ejemplo la conexión entre grafos y geometrías finitas es obvia.

Observe el siguiente ejemplo de sistema axiomático de una geometría finita:

1.- Hay cinco puntos y dos líneas.
2.- Cada línea contiene al menos dos puntos.
3.- Cada línea contiene como máximo tres puntos.

Con estas reglas de juego se deben describir cuáles son las posibles configuraciones. Pero en lugar de describir los conjuntos resultantes con letras y palabras, resuelta mucho más fácil hacer los posibles grafos con cinco puntos y sus aristas pertinentes. En la siguiente figura puede observar todas las configuraciones posibles.



Este tipo de grafo sirve para optimizar una fumigación como fue mencionada, también se puede llevar a otros contextos como en que los puntos son personas de una junta directiva de una asociación y que las líneas son comités formados por dos o tres miembros de la junta.

2.5. El problema de la conexión del mínimo costo

Supongamos que se desea comunicar telefónicamente "n" ciudades, de manera que la longitud del cable sea mínima, es evidente que el grafo formado, tomando las "n" ciudades como vértices y el cable que une dos ciudades como aristas, debe ser un árbol, ya que si existiera un ciclo se podría omitir cualquier arista sin perder la condición de conexa (todas las ciudades deben estar conectadas, es decir, los vértices deben ser alcanzables). Una posible solución al problema de encontrar todos los posibles árboles rotulados, es decir, "n^{n-2}" árboles, luego, en cada uno de ellos sumar las longitudes de sus aristas y seleccionar aquel que tenga la menor suma, es obvio que el método empleado es correcto; la objeción a este método es la gran cantidad de árboles rotulados existentes que dificultan la selección; pero existe un algoritmo, el de kruskal, que soluciona el problema con mayor efectividad.

Teorema 2.4 Sea G un grafo conexo de "n" vértices. Entonces la siguiente construcción proporciona una solución al problema de la conexión de mínimo costo:

1) Sea a_1 la arista de G de menor longitud.
2) Definimos la secuencia $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ eligiendo a cada paso una arista (no elegida previamente) de menor longitud posible, con la condición de que no forme ningún ciclo con las aristas elegidas previamente.
   Entonces el árbol expandido requerido es el subgrafo T de G.

Demostración:

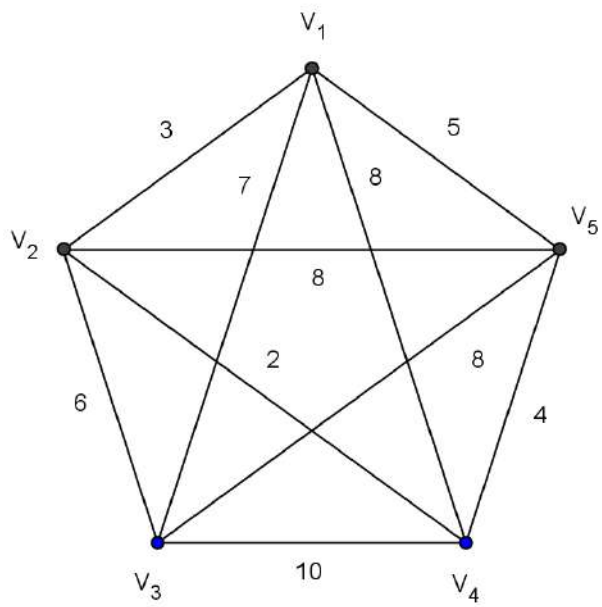
T es un árbol expandido ya que no contiene ningún ciclo y posee n-1 aristas, luego, solo queda por demostrar que T es el árbol con la menor extensión de cable (costo mínimo)

Vamos a suponer que existe otro árbol S con una menor extensión de cable, es decir, S < T . (S < T en relación con la cantidad de cable utilizado).

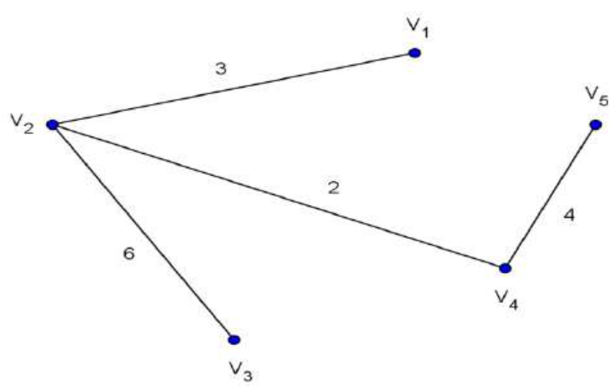
Si a_1 es la primera arista de la secuencia que no pertenece a S, añadimos a_1 a S y resulta un subgrafo de G con un único ciclo "C" que contiene a la arista a_1 ya que el ciclo "C" contiene una arista a_k que pertenece a S, pero no a T. El subgrafo obtenido a partir de S remplazando a_1 por a_k es aun un árbol (llamémosle S'). Pero se sabe que $a_i \neq a_k$ por construcción y se obtiene que S´ < S (siempre relacionando la cantidad de cable utilizado) y S´ tiene una arista en común más con T que con S; al repetir este procedimiento se deduce que se puede transformar S en T, paso a paso, aminorando los costos en cada paso; luego se obtendrá que T < S $\Rightarrow \Leftarrow$.

Luego T es el árbol que ocupa la menor extensión de cables.

Ejemplo 2.2



La figura muestra las ciudades V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 y las respectivas distancias entre ellas, representadas en el grafo G. Segun el algoritmo de Kruskal tenemos que:



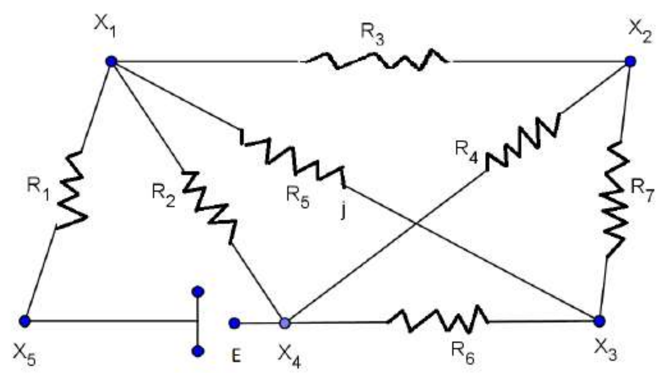
$$a_1 = \overline{V_2\, V_4}$$

$$a_2 = \overline{V_2\, V_1}$$
$$a_3 = \overline{V_4\, V_5}$$
$$a_4 = \overline{V_2\, V_3}$$

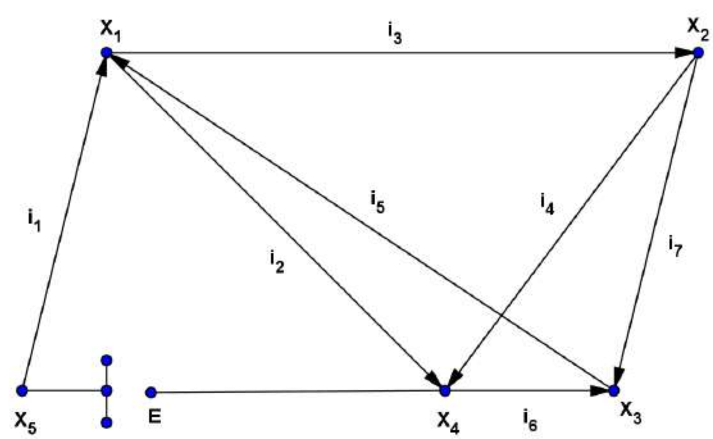
El subgrafo resultante es un árbol expandido es decir, todas las ciudades están conectadas y el costo será el mínimo.

2.6. Grafos y redes eléctricas

Supongamos que tenemos una red eléctrica y deseamos determinar la intensidad de corriente que circula por cada cable de la siguiente red:



A fin de hacer el estudio, asignaremos direcciones arbitrarias a las corrientes que circulan por cada alambre y los representaremos como un grafo dirigido de seis vértices y ocho arcos como lo muestra en la figura:



Observación 2.1. "E" nos indica una fuente de energía según las leyes de Kirchhoff.

i) La suma algebraica de las corrientes que inciden en cada vértice es cero, y el voltaje total en cada vértice del circuito es las sumas algebraicas de los productos de las corrientes a cada cable del circuito.
Aplicando estas leyes a los circuitos $\overrightarrow{x_1x_5x_4}$, $\overrightarrow{x_1x_2x_4}$ y $\overrightarrow{x_1x_2x_4x_5}$, obtendremos la siguiente relación.

$$\left.\begin{aligned} i_1R_1 + i_2R_2 &= E \\ i_3R_3 + i_4R_4 - i_2R_2 &= 0 \\ i_1R_1 + i_3R_3 + i_4R_4 &= 0 \end{aligned}\right|$$

Se observa que la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, luego no nos proporciona mayor información, entonces utilizamos el sistema fundamental de circuitos que nos proporciona toda la información que necesitamos sin caer en redundancia, con lo que obtendremos las siguientes ecuaciones:

Para el circuito $\overrightarrow{x_1x_5x_4}$: $i_1R_1 + i_2R_2 = E$

Para el circuito $\overrightarrow{x_1x_4x_3}$: $i_2R_2 + i_5R_5 + i_6R_6 = 0$

Para el circuito $\overrightarrow{x_1x_2x_3}$: $i_3R_3 + i_5R_5 + i_7R_7 = 0$

Para el circuito $\overrightarrow{x_1x_4x_2x_3}$: $i_2R_2 - i_4R_4 + i_5R_5 + i_7R_7 = 0$

Y las ecuaciones que se obtienen de la primera ley de Kirchhoff son:

Para el vértice x_1: $i_1 - i_2 - i_3 + i_5 = 0$

Para el vértice: x_2: $i_3 - i_4 - i_7 = 0$

Para el vértice: x_3: $i_5 - i_6 - i_7 = 0$

La solución de este sistema de siete ecuaciones nos proporcionara el valor de las siete corrientes $i_1, i_2, \ldots., i_7$

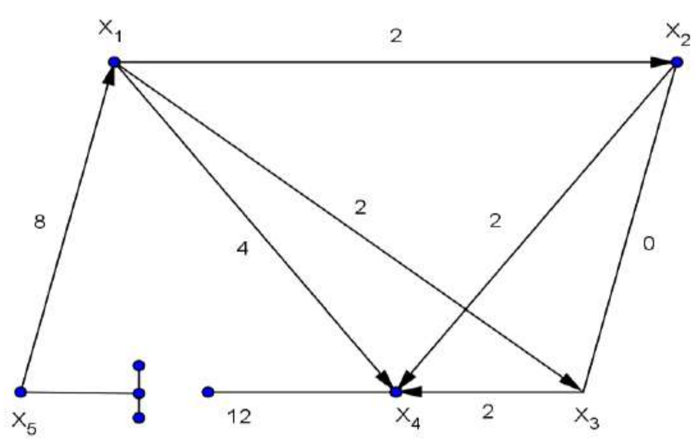
Por ejemplo si E= 12 Volts, y cada cable tiene una resistencia $R_i = 1$ Ohms $\forall_1 = 1, \dots \dots, 7$, el sistema queda de la siguiente manera:

1) $i_1 + i_2 = 12$
2) $i_2 + i_5 + i_6 = 0$
3) $i_3 + i_5 + i_7 = 0$
4) $i_2 - i_4 + i_5 + i_7 = 0$
5) $i_1 - i_2 - i_3 + i_5 = 0$
6) $i_3 - i_4 - i_7 = 0$
7) $i_5 - i_6 - i_7 = 0$

Resolviendo este sistema
Tenemos:

$$i_1 = 8$$
$$i_2 = 4$$
$$i_3 = 2$$
$$i_4 = 2$$
$$i_5 = -2$$
$$i_6 = -2$$
$$i_7 = 0$$

Observación 2.2. i_5 e i_6 son valores negativos, por lo tanto cambia el sentido de la corriente. La solución es la que se indica en la figura:

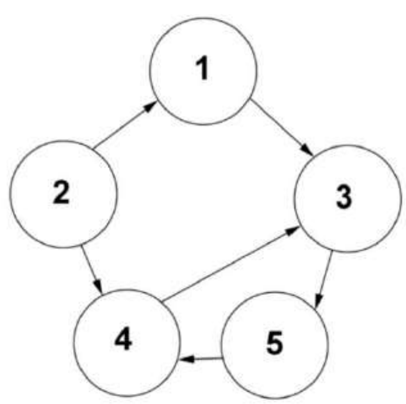


2.7. Grafos y redes de computadores

El principal problema de una red de computadores es mantener una comunicación rápida y expedita entre todos los computadores y así permitir que los mensajes viaje con fluidez entre cualquier lugar de la red y cualquier punto de destino. El problema no se origina en la velocidad física de transmisión, que es la velocidad de la luz, sino en la forma que se ordena la red y el método de asignación de caminos y prioridades para la enorme cantidad de mensajes que deben viajar por esta. Primero, es imprescindible que en todo momento esta interconectada, es decir, no exista ningún computador o grupo de computadores aislados por la red, para evitar estos contratiempos se diseña la red de tal forma que cada computador tenga con el resto al menos una vía alternativa de comunicación. De esta manera, si un computador abandona el servicio, otro puede remplazarlo en la tarea de transmitir mensajes. Un segundo problema es la distribución de la carga de los mensajes. Existen momentos críticos en que la cantidad de mensajes que fluyen por determinados caminos de la red es excesiva para el soporte físico de esta, en consecuencia, estas zonas se convierten en más lenta que el resto de la red, la solución es la asignación de vías alternativas, que permiten desviar la carga.

Todas estas situaciones pueden ser analizados en forma abstractas con la teoría de grafos y encontrarles una adecuada solución, de tal forma, es posible determinar los puntos críticos de la red, la fluidez aproximada de la comunicación y el grado de interconexión de los computadores.

Luego de esta breve exposición es posible que no se encuentre clara la relación entre lo abstracto y lo práctico, por esto es ideal el análisis de una situación real: Supongamos que queremos analizar la dependencia de una pequeña red de computadores. El resultado nos dirá si todos los computadores, pueden transmitir datos a todos los demás. A cada computador lo llamaremos vértices y a la conexión que existe entre ellos será un arco, a cada vértice le asignaremos un número para que se lo identifique con el resto de los vértices y así el grafo dirigido resultante es:



Este es el primer paso para conseguir un orden en el estudio del problema, una vez enumerados los vértices se construye una matriz que va a describir la relación que existe entre los vértices. Si un vértice ubicado en la columna está relacionado con uno ubicado en la fila se escribe un 1 en la intersección, de lo contrario un cero, así la matriz queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se denomina de adyacencia y permite analizar muchas propiedades de los grafos. Esta matriz, por ejemplo, se puede operar de manera análoga a una matriz aritmética común, la única variación es estar formada por números binarios, por lo tanto en las operaciones de suma y producto se debe hacer el remplazó por sumas y productos booleanos respectivamente.

Finalmente determinaremos las potencias de esta matriz de adyacencia hasta n=5 (números de computadores), entonces, las potencias calculadas con las indicaciones anteriormente expuestas son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de enlace:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz indica, por los ceros presente en ella, que los vértices 3, 4 y 5 no tienen posibilidad de transmisión hacia los vértices 1 y 2. Por lo tanto los computadores 3, 4 y 5 están aislados por la red.

2.7. Grafos en Química

En la química cualquiera que haya estudiado química orgánica sabe bien cómo usar grafos en esa disciplina, que se emplean para representar los diferentes compuestos:

2.7.1. Estructura de Lewis

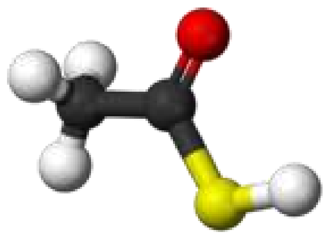
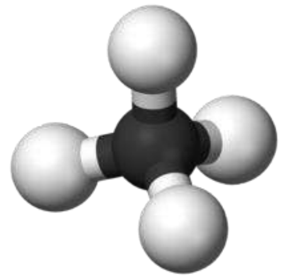
La estructura de Lewis, es una representación gráfica que muestra los pares de electrones de enlaces entre los átomos de una molécula y los pares de electrones solitarios que puedan existir. Son representaciones adecuadas y sencillas de iones y compuestos, que facilitan el recuento exacto de electrones y constituyen una base importante para predecir estabilidades relativas. A estas moléculas adquieren la configuración electrónica de un gas notable. En la mayor parte de los compuestos formados entre elementos representativos de los periodos 2,3 y 4 se puede formular una estructura que cumpla la regla del octeto.

Las estructuras de Lewis muestran los diferentes átomos de una determinada molécula usando su símbolo químico y líneas que se trazan entre los átomos que se unen entre sí. En ocasiones, para representar cada enlace, se usan pares de puntos en vez de líneas. Los electrones desapartados (los que no participan en los enlaces) se representan mediante una línea o con un par de puntos, y se colocan alrededor de los átomos a los que pertenece.

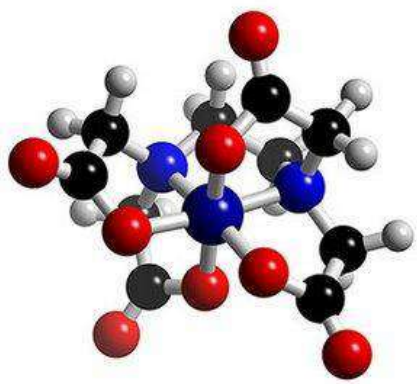
Para aplicar esta regla es necesario seguir las siguientes recomendaciones:

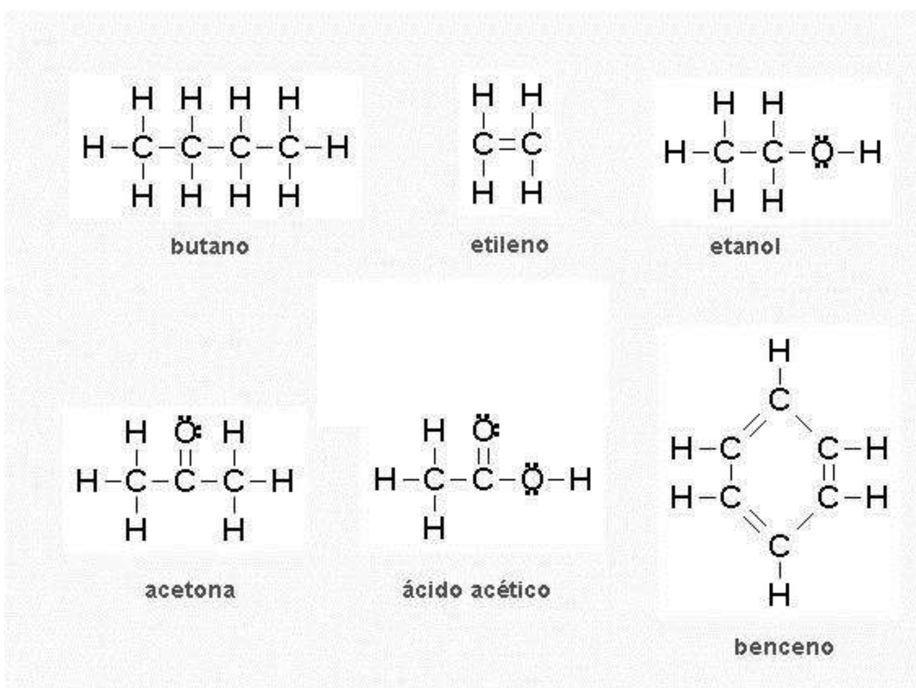
-Contar los electrones de valencia.
-Número de pares de electrones.
-Situar como átomo central al menos electronegativo.
-Unir los átomos con pares de electrones enlazantes.
-Completar los octetos agregando pares de electrones solitarios a los átomos.

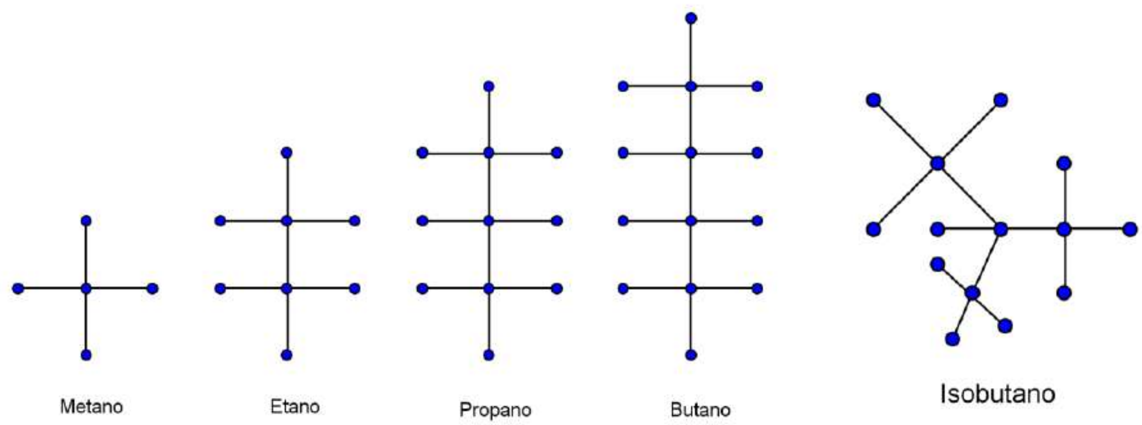
-Establecer enlaces múltiples con los átomos que queden con su octeto un completo.
-Asignar cargas formales.
-Elegir la estructura con la menor separación de carga posible.
-Indicar si hay estructuras equivalentes en resonancia.

Acido tioacético **Metano**






Metano
Etano
Propano
Butano
Isobutano

CAPÍTULO 3
GRAFOS Y EDUCACIÓN

3.1. Introducción

En este capitulo se centrara la teoría de grafos en el ámbito educacional a través de juegos didácticos, la intención de esto es estimular en el alumno la capacidad de razonamiento con el método de modelización matemática.

Dentro del capitulo se mostraran una gran variedad de juegos para mas adelante presentar una investigación realizada a alumnos de básica y media los cuales reflexionan sobre la teoría de grafos.

3.2. Beneficio de los grafos en la educación

A lo largo del siglo XX el gran desarrollo de la teoría de grafos y la cantidad de aplicaciones a los problemas más diversos ha asegurado un interés educativo por esa teoría en el nivel superior de la formación.

Los cursos de "Teoría de grafos y sus aplicaciones" forman parte hoy en día de los estudios de matemáticas, de investigación operativas, de matemática discreta, de diversas especialidades de ingeniería (organización de obras, edificación, eléctrica, telecomunicación...) y, por supuesto, están presentes en todos los estudios informáticos.

Lo que realmente aun esta pendiente es el aprovechamiento educativo de los grafos en los niveles preuniversitarios. No se trata de dar un capitulo de grafos o elevar esta teoría al mismo nivel que la aritmética o la geometría, pero diversas experiencias en educación matemática demuestran que hay recursos de la teoría de grafos que si tienen un alto valor formativo y, por tanto, merecen ser incorporados.

Entre las virtudes educativas de los grafos destacaríamos las siguientes:

1) Los grafos son a menudo magníficos ejemplos de *modelización matemática.* A pesar de su simplicidad aportan interesantes situaciones reales que pueden ser descritas y estudiadas asociando grafos.

Los grafos ofrecen bellos ejemplos de matemática en la vida cotidiana y, por lo tanto, contribuyen a visualizar la presencia del mundo lo matemático en la realidad de todos los días, facilitando que se establezcan conexiones, que es algo trascendental.

2) Trabajando con grafos se promueve el aprendizaje de *formas de razonamientos* que son genuinamente matemáticas y tienen un alto valor formativo. Por ejemplo los razonamientos inductivos y los combinatorios.
3) Los grafos, ya sean recreativos o aplicados, permiten trabajar en *la resolución de problemas.* Gracias a las aportaciones de George Polya se sabe que resolver problemas debe ser uno de los motores en el aprendizaje de las matemáticas.

El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios de hace tres siglos.

George Polya: *(13 de diciembre de 1887 – 7 de septiembre de 1985) fue un matemático que nació en Budapest, Hungría y murió en Palo Alto, EUA. Trabajó en una gran variedad de temas matemáticos, incluidas las series, la teoría de números, geometría, álgebra, análisis matemático, la combinatoria y la probabilidad.*

3.3. JUEGOS Y GRAFOS EDUCATIVOS

Muchos son los juegos que consisten en trazar grafos, o los que mediante grafos se analiza si existe una estrategia ganadora o no. Como ejemplos citamos algunos juegos históricos.

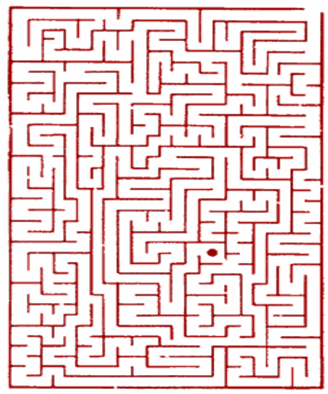
3.3.1. ¿Quién dirá 20?

El primer jugador dice 1 o 2. Por turnos, los dos jugadores pueden ir sumando 1 o 2 al resultado anterior. Gana el que dice 20 ¿Es un juego con estrategia ganadora? ¿Y si en lugar de 20 es 83 o 100?

3.3.2. El laberinto del jardín de Rouse Ball

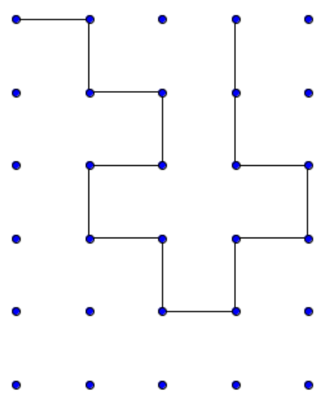
Rouse Ball ayudo a popularizar muchos conceptos gracias a sus divertidos escritos sobre matemática recreativa. En el famoso laberinto de Ball está marcada la entrada –salida (arriba) y un puntito dentro del laberinto ¿Se puede llegar a él y volver a salir sin recorrer el mismo camino?

Rouse Ball: *(14 de agosto de 1850 – 4 de abril de 1925) fue un matemático inglés, abogado y miembro del Trinity College de Cambridge de 1878 a 1905. Es conocido principalmente por su labor como historiador de las matemáticas y por ser autor de uno de los libros más populares de matemática recreativa*



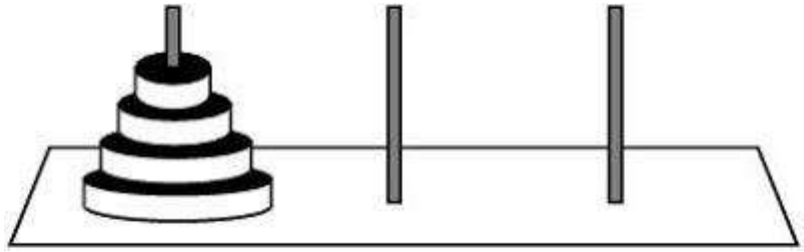
3.3.3 El juego del serpeo

Consiste en un retículo de puntos de 5 por 6 (o cantidades cualesquiera) en el que los jugadores a partir de cualquier punto van trazando por turno un segmento unitario (según las direcciones perpendiculares del retículo) formando un camino continuo, pudiendo añadirse segmentos en cualquiera de los extremos del camino precedente. Pierde la partida quien se ve obligado a cerrar el camino.



3.3.4. Torres de Hanói

Inventado por Eduard Lucas en 1883, consiste en tres varillas verticales en la que en la primera hay n discos diferentes (con un agujero en el centro) colocados de mayor a menor de forma ascendentes. Nunca un disco se puede colocar sobre uno menor. El juego trata de hacer movimientos de los discos en las varillas hasta lograr tener la misma torre de partida situada en la tercera varilla. Solo se mueve un disco cada vez y debe estar situado arriba.



François Édouard Anatole Lucas: *(Amiens, 4 de abril de 1842 - París, 3 de octubre de 1891) fue un reconocido matemático francés. Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la serie de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos*

El número de soluciones para n discos es $2^n - 1$, donde n es igual a la cantidad de discos. Puede usar grafos para ayudarse a ver patrones de movimientos de discos. En la actualidad, hay webs interactivas en Internet sobre este juego.

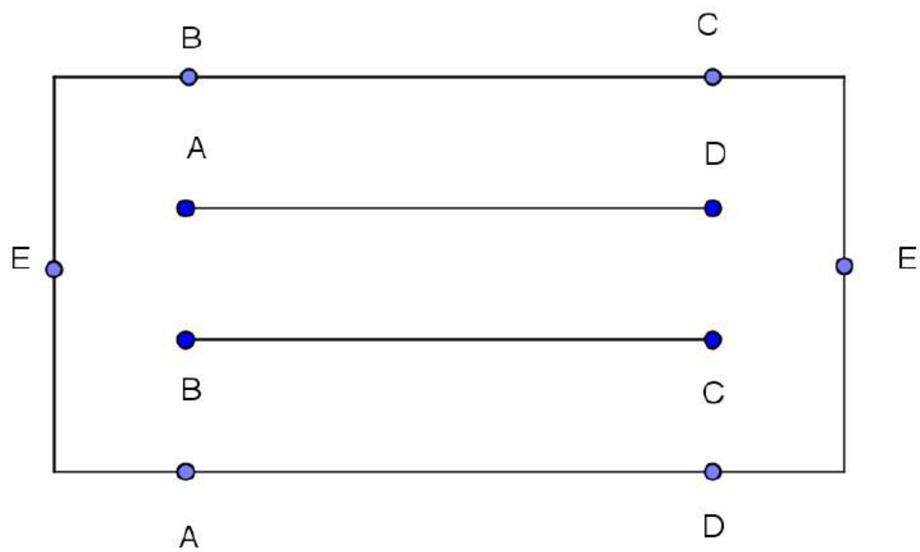
3.3.5. Dos circuitos de Martin Gardner

Fascinado por los grafos planos, Martin Gardner propuso y/o resolvió numerosos problemas para deleite de sus lectores en todo el mundo. Pensando en divulgar la aplicación de los grafos planos a los circuitos, Gardner ya argumento que este caso de los circuitos era un buen ejemplo en el que las uniones entre los diversos puntos (vértices) debían hacerse mediante líneas que formaran un grafo plano, evitando cruces que provocarían cortocircuito.

Martin Gardner: *(Tulsa, Oklahoma, 21 de octubre de 1914 – Norman, Oklahoma, 22 de mayo de 2010) fue un divulgador científico y filósofo de la ciencia estadounidense, muy popular por sus libros de matemática recreativa.*

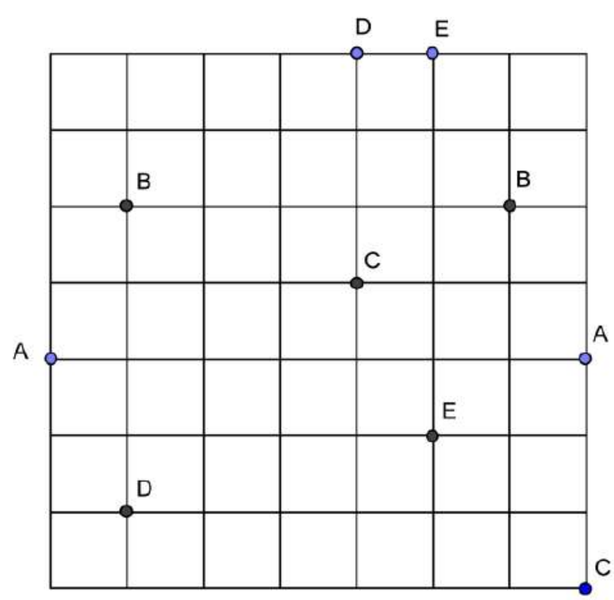
3.3.5.1. El circuito en un rectángulo

En este rectángulo (y sin salir de él) deben trazarse cinco líneas continuas que unan A con A, B con B, C con C, D con D, y E con E, sin cruzar en ningún caso los segmentos AD y BC marcados en la figura.



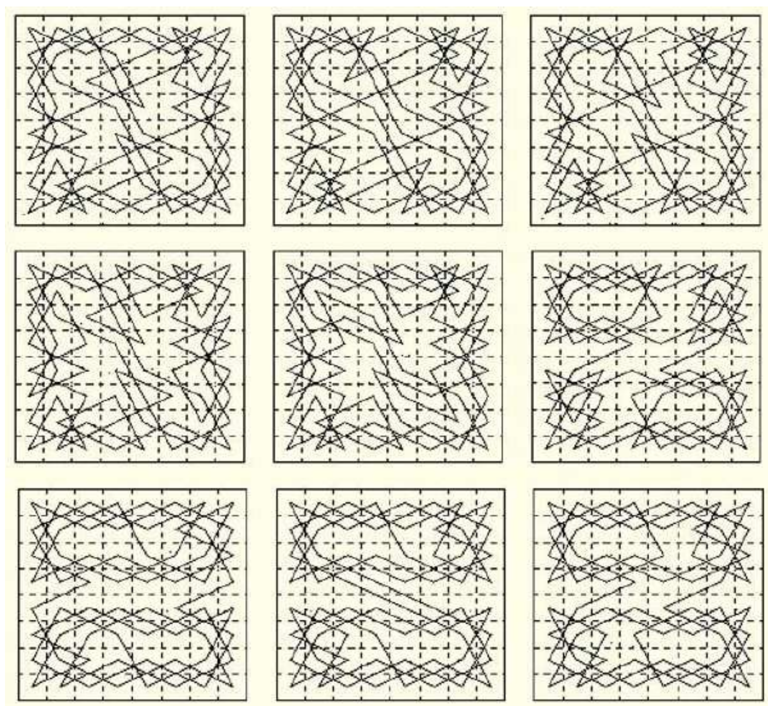
3.3.5.2. El circulo en la cuadricula

En esta cuadricula de 7 X 7 deben unirse, mediante cinco líneas continuas que sigan solo segmentos de la trama de cuadrados y que nunca se crucen, cada uno de los pares de puntos con igual letra asignada.



3.3.6. Rutas del caballo en ajedrez

El popular tablero de ajedrez ha dado como pie a numerosos retos matemáticos. Un problema clásico es fijar una de las fichas del juego (peón, alfil, rey, caballo, torre…) y estudiar que tipo de trayectorias puede hacer en el tablero moviéndose por supuesto de acuerdo con las especiales características de desplazamientos que este tipo de figuras tienen predeterminado. Resulta particularmente interesante el caso de los caballos y la cuestión ¿es posible para un caballo de ajedrez hacer un recorrido en el tablero en el que partiendo de un cuadrado pueda regresar al mismo habiendo recorrido todos los cuadrados (64), pasando por todos ellos una sola vez?

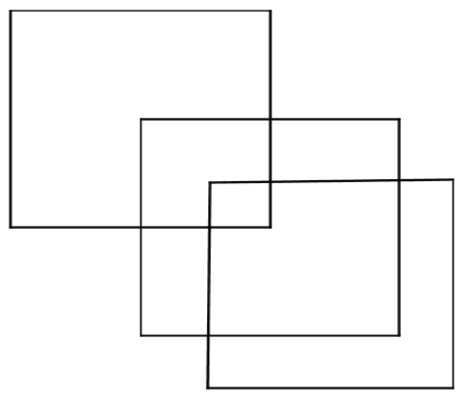


La respuesta es si y la buena noticia es que hay muchos caminos posibles. Este problema, como muchos otros de ajedrez, se puede estudiar mediante teoría de grafos. Cada cuadrado representa un vértice del grafo, cada movimiento del caballo equivale a una línea que une dos vértices de este grafo, cada movimiento del caballo equivale a una línea que une dos vértices de este grafo (respetando la peculiar forma de los saltos) y, por lo tanto, el reto es encontrar un tour hamiltoniano con salida y meta en el mismo cuadrado.

3.3.7. Lewis Carroll y los grafos Eulerianos

Charles Lutwitge Dogson (1832-1898), alias Lewis Carroll, más allá de escribir Alicia en el país de las maravillas, tuvo siempre una gran afición por todo tipo de matemáticas recreativas. Le gustaba proponer problemas ingeniosos que los niños pudieran resolver; entre ellos propuso algunos que actualmente clasificaríamos dentro de la teoría de grafos.

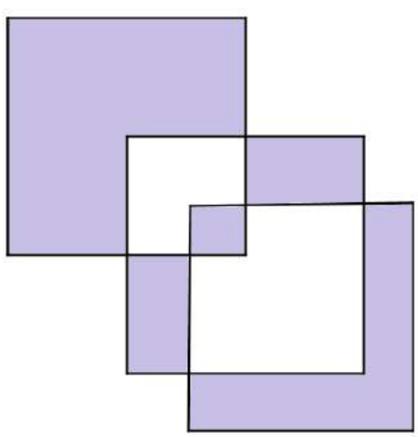
El grafo más popular de Carroll es el de los tres cuadrados solapados tal como están representados en la figura adjunta, la idea es recorrer el dibujo sin levantar el lápiz del papel, pasando por todas las líneas sola una vez.



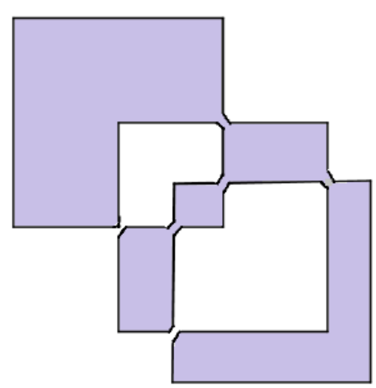
Se ideo un encantador método para resolver este tipo de problemas, que consistía en colorear regiones alternas y entonces separar zonas en los vértices para lograr "Descubrir" el camino buscado (1).

Visto el contorno de recorrido entonces resultaba ya trivial volver con el lápiz sobre el grafo inicial y realizar el recorrido pertinente (2).

(1)

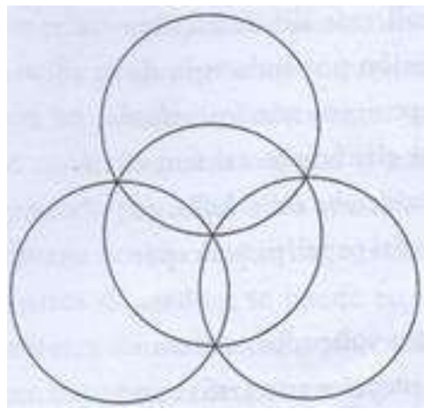


(2)



3.3.8. El problema de las cuatros circunferencia

A O' Beirne se le ocurrió planear año más tarde un reto similar al de Carroll, pero cambiando los tres cuadrados por cuatro circunferencia que se intersectaban en una forma maravillosamente simétrica como se puede apreciar en la figura siguiente:

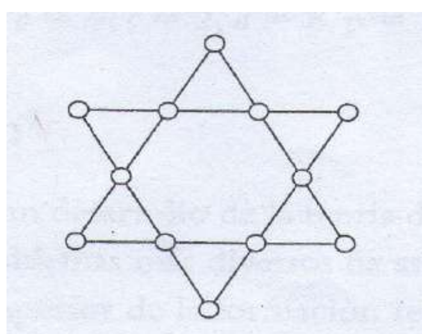


Se invita a tener el placer de descubrir cómo hacer el recorrido por todos los arcos de las cuatro circunferencias, pasando por ellos una solo vez.

Evidentemente el truco de colorear que acaba de citarse para el casi de Carroll le puede servir de inspiración.

3.3.9. El hexagrama mágico

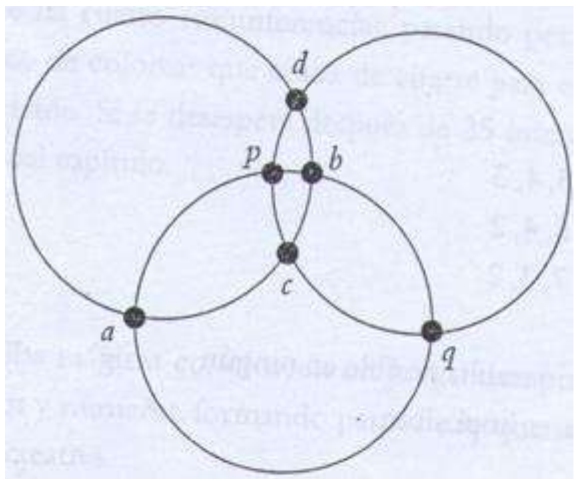
Pasemos ahora a considerar el hexagrama mágico. Se trata de la famosa y mítica estrella de David o sello de Salomón, intersección de dos triángulos equiláteros.



Como puede verse en la figura aparecen 12 vértices distribuidos en 6 líneas de cuatro, por lo cual el reto ahora es distribuir los números del 1 al 12. La constante que debe dar en cada línea es 26.

Una alternativa mas simple y que admite una forma sistemática de resolución es el caso de las circunferencias mágicas: se dan varias circunferencias con todos sus cortes posibles y se trata de distribuir números de forma en que cada circunferencia los vértices que estén en ella sumen una cantidad determinada, por ejemplo, 20.

En la siguiente figura tienen tres círculos con las letras *a,b,c,d, p, q* y a partir de ella puede escribir las relaciones que deben darse entre esas letras.



Tendrá entonces un sistema de ecuaciones:

$$a + b + c + d = 20$$

$$c + d + p + q = 20$$

$$a + b + p + q = 20$$

Y sumando ahora las tres ecuaciones resulta

$$2a + 2b + 2c + 2d + 2p + 2q = 60$$

O de forma equivalente:

$$a + b + c + d + p + q = 30$$

Restando de esta ultima igualdad cada una de las tres primeras, resulta:

$$a + b = c + d = p + q = 10$$

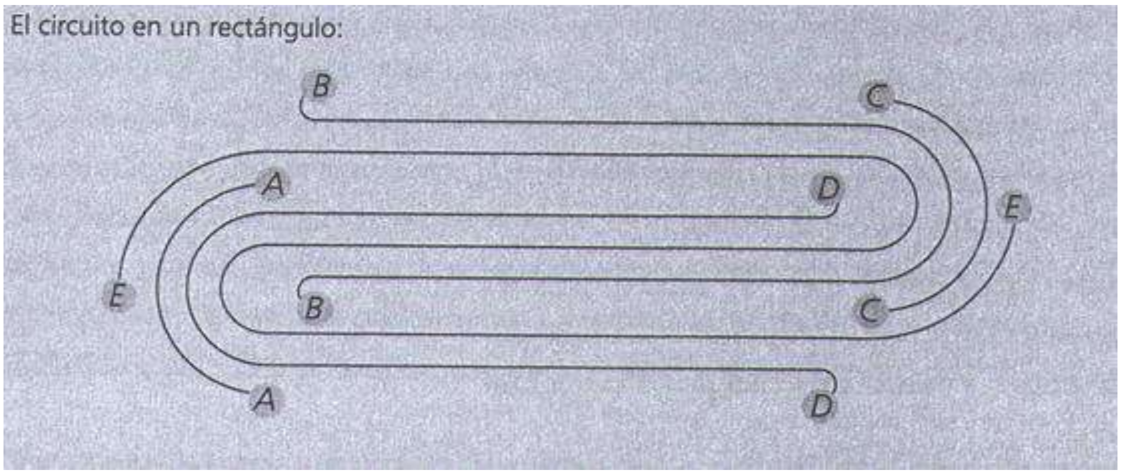
Y, por lo tanto, hay varias elecciones posibles, por ejemplo:

$$a = 1, b = 9, c = 2, d = 8, p = 3, q = 7$$

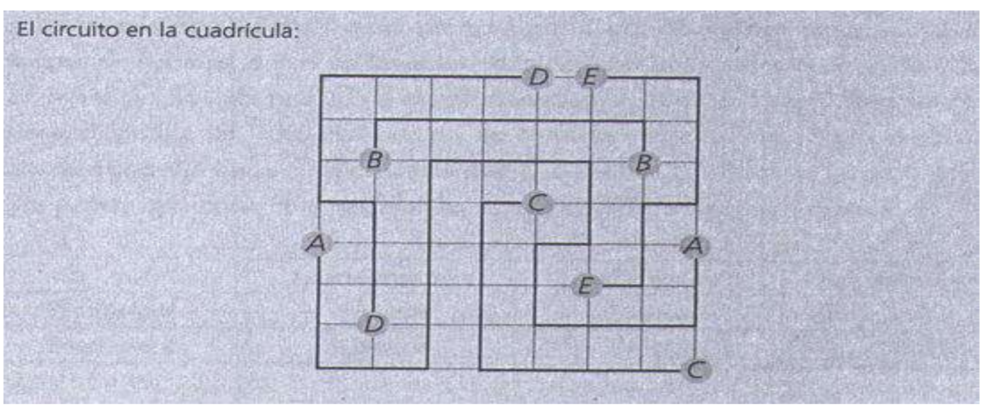
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1) El circuito en el rectángulo (3.3.5.1)
2) El circuito en la cuadricula (3.3.5.2)
3) El problema de las cuatro circunferencia (3.3.8)

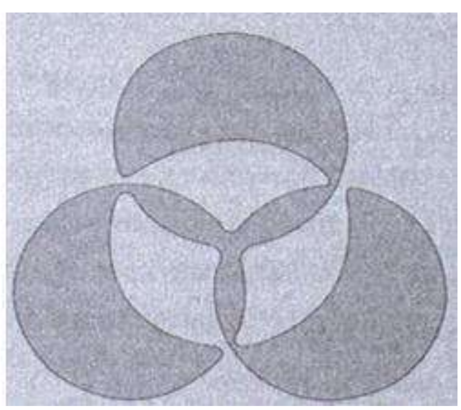
(1)



(2)



(3)



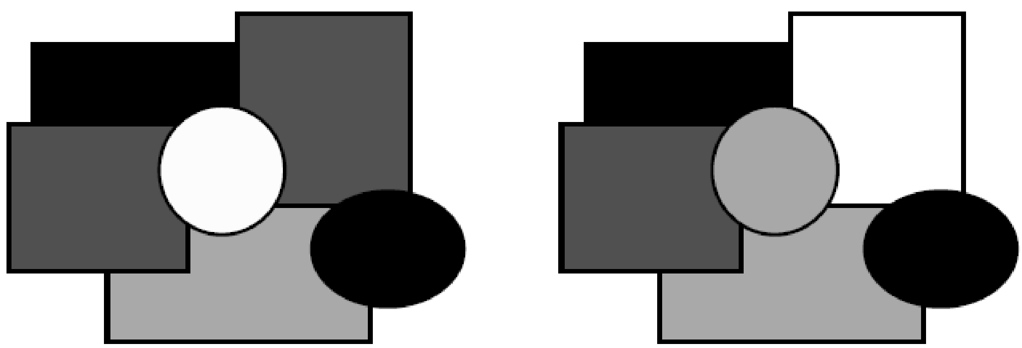
3.4. Investigación de grafos educativos

En el siguiente punto se mostrara como en dos colegios (Colegio Árbol de la vida y Colegio Dinabec College) de la Comuna de San Carlos alumnos de básica y los primeros curso de nivel medio fueron sometidos a un resumen breve de los aspectos más importante del concepto de teoría de grafos y sus aplicaciones, para luego aplicarles los juegos educativos antes mostrado.

A continuación la guía entregado a los alumnos:

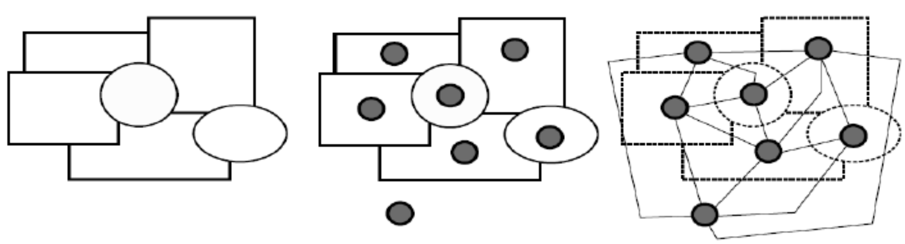
TEORIA DE GRAFOS

Una coloración de un mapa es la asignación de un color a cada región (incluyendo al mar), con la única restricción de que países vecinos deben tener distinto color. Tal y como en los mapas políticos, donde dos países vecinos tienen distintos colores, para no confundirlos. El objetivo es asignar a cada mapa, una coloración que use la menor cantidad de colores posible.

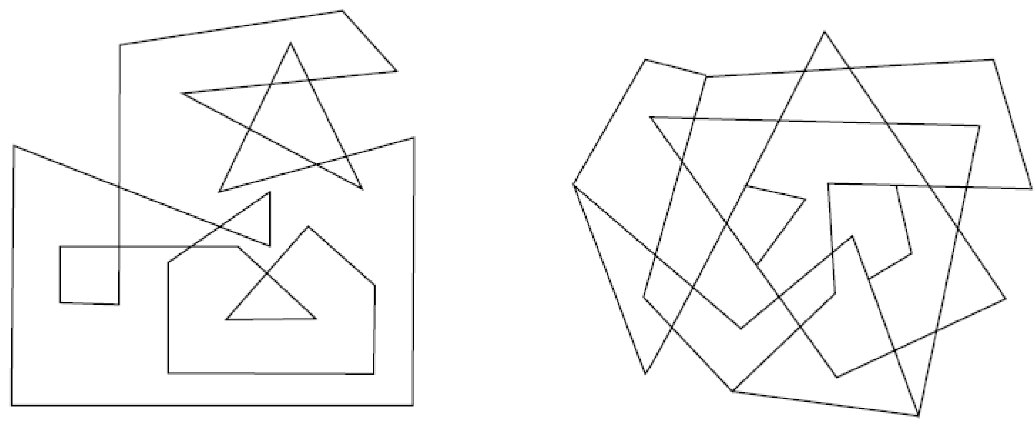


Coloración admisible   Coloración No admisible

Para asociar un grafo a un mapa se realiza el siguiente procedimiento:
A cada región (incluyendo el mar) se le asocia un vértice.
Se conectan dos vértices con un arco si las regiones asociadas son vecinas.

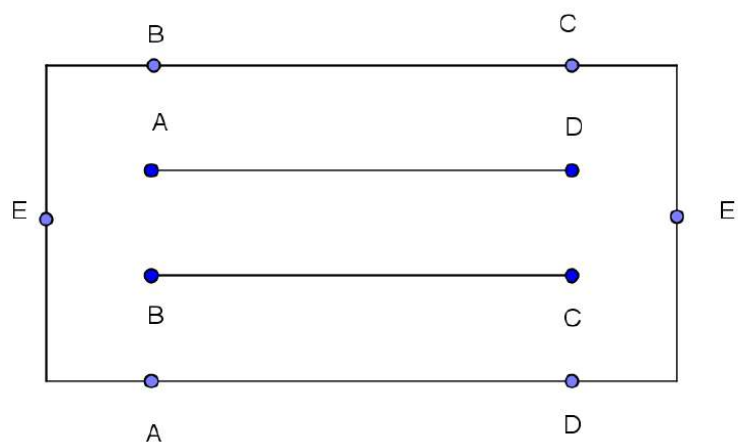


Ejercicio 1. Coloree los siguientes mapas con la menor cantidad posible de colores. Explique por qué no se pueden colorear con menos colores. Indique cuántas regiones vecinas tiene el mar:



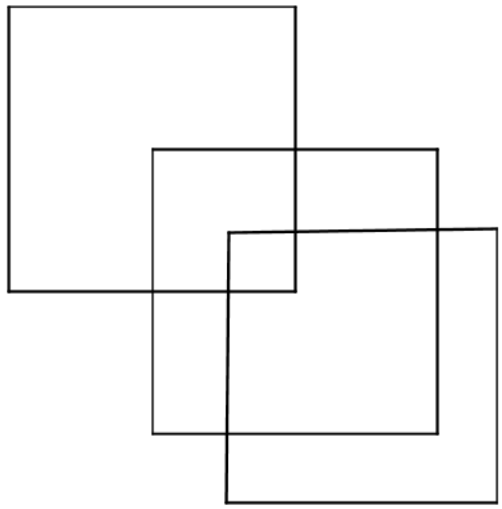
El circuito en un rectángulo

En este rectángulo (y sin salir de él) deben trazarse cinco líneas continuas que unan A con A, B con B, C con C, D con D, y E con E, sin cruzar en ningún caso los segmentos AD y BC marcados en la figura.

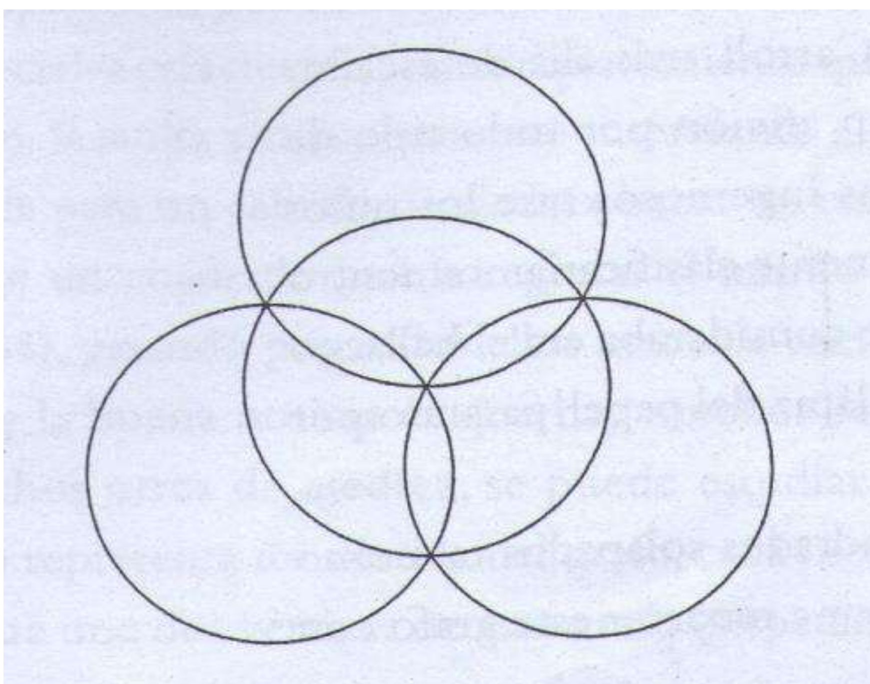


Trazar cinco líneas continuas que unan A con A, B con B, C con C, D con D y E con E, sin cruzar los segmentos AD y BC marcados en la figura.

Circuito Eulerianos



Recorrer el dibujo sin levantar el lápiz del papel, pasando por todas las líneas solo una vez.



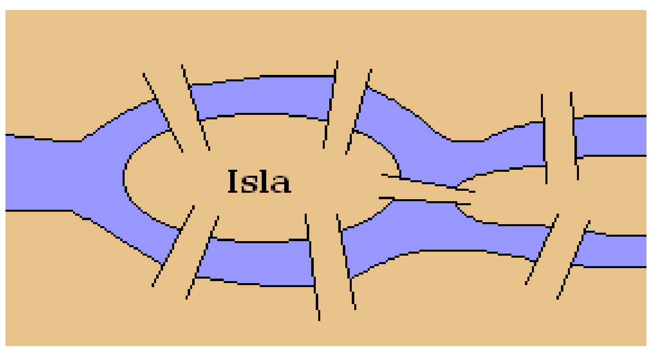
Recorrer el dibujo sin levantar el lápiz del papel, pasando por todas las líneas solo una vez.

Las diapositivas expuestas:

- **Teoría de Grafos**

  La teoría de grafos se inició gracias a un problema turístico que resolvió Leonhard Euler. Dice la historia que en 1736 el eminente matemático se detuvo, en uno de sus viajes en Königsberg.

¿Es posible cruzar cada uno de los puentes solo una vez?



Esto es imposible

- **Grafos**

  En términos elementales podríamos definir un grafo como un conjunto de puntos (llamados elementos, vértices, nudos o nodos) con líneas que unen pares de vértice de ellas.

Ejemplo:

Esta teoría tiene aplicaciones en la vida cotidiana;

- Electricidad
- Electrónica
- Arquitectura
- Optimización
- Mapas
- Geometría
- Química
- Redes neuronales
- Sistema P.E.R.T
- Viajes
- Juegos.
- Aplicación grafos en mapas y colores

- **Teorema de los cuatro colores:**

  Un mapa plano es coloreable como mínimo con cuatro colores.

- **Juegos**

  1.- ***El circuito en un rectángulo.***

  2.- Circuitos Eulerianos.

Conclusión:

- ¿Qué es teoría de grafo para ti?
- ¿Qué te parecieron las aplicaciones de esta teoría?
- ¿Es de tu interés aprender matemática, sabiendo sus aplicaciones?
- Comentario.

Las respuestas entregadas por los alumnos fueron las siguientes:

3.4.1. Respuestas taller teoría grafos

Alumnos de primer año medio, colegio Árbol de la vida, San Carlos, Ñuble.

1.- ¿Qué es teoría de grafo para ti?

La teoría de grafos es un sistema que ayuda a optimizar tareas y actividades, todo esto a partir de un conjunto de puntos unidos por líneas, las cuales pueden o no tener dirección , además cuentan con muchas propiedades, con esto se pueden resolver problemas y ayuda a resolver cosas de la vida cotidiana.

2.- ¿Qué te parecieron las aplicaciones de esta teoría?

Las aplicaciones resultan ser muy cotidianas y por lo desconocida que es esta teoría, se hace necesaria, ya que con algo que parece tan simple, puede resolver problemas. Esto es muy interesante ya que hace pensar si un problema tiene o no tiene solución, también todas estas aplicaciones hacen que la matemática sea más interesante de aprender.

3.- ¿Es de tu interés aprender matemática, sabiendo sus aplicaciones?

Si, ya que la clase es más didáctica, eso hace que sea más entretenida. Definitivamente es necesario conocer las aplicaciones de la matemática ya que de no ser así se pierde el interés y se subestima el verdadero uso de ella, se necesita saber, para que se estudien y cuál es su real finalidad.

Alumnos de Octavo Básico, Colegio Dinabec College.

1.- ¿Qué es teoría de grafo para ti?

Para mí la teoría de grafos es la conexión de aristas respectos a vértices o a nodos en un esquema donde en ella se puede aplicar varias propiedades y teorías en nuestra vida cotidiana como por ejemplo en la coloración de un sector sin que se junten los colores solo los vértices.

2.- ¿Qué te parecieron las aplicaciones de esta teoría?

Me gusto porque me hace pensar lógicamente para ver por donde pasaba una solo vez y siempre se termina usando la teoría de grafos

3.- ¿Es de tu interés aprender matemática, sabiendo sus aplicaciones?

Me encantaría aprender matemática más avanzada y todas sus aplicaciones a través de juegos lógicos.

3.4.2. Reflexión

La participación de los alumnos fue destacada, se tomó a una muestra de estudiantes de primer año medio y octavo básico , se realizó una breve explicación sobre la teoría de grafos, se nombró brevemente las distintas aplicaciones que pueden haber, luego se aplicó un pequeño test, donde debieron aplicar circuitos Eulerianos y optimizar en el pintando de mapas.

La experiencia fue gratificante ya que los alumnos, estuvieron toda la sección atentos, ellos hicieron comentarios, como: "esto me hizo pensar", "estuvo entretenido", cosas que no se oyen usualmente en un aula de clases, es demasiado importante desarrollar la lógica en los alumnos, no mecanismos para resolver ciertas cosas, los juegos de grafos logran este objetivo, es muy importante siempre mostrar aplicaciones de la matemática al alumno ya que sin eso no le hayan sentido. Una parte de esta prueba fue sacada de una olimpiada de matemática nivel medio 1.

CONCLUSIÓN

Durante el desarrollo de las distintas etapas de este trabajo llegamos a la conclusión que:

Buscamos de alguna manera poder entregar a la carrera de Pedagogía en Educación Matemática, nuestros agradecimientos a través de este seminario de título por los saberes que aquí hemos adquirido en estos cinco años académicos.

Ampliamos nuestros conocimientos más allá de lo teórico sobre grafos, analizamos diversas aplicaciones de la teoría de grafos como son: Electricidad, Electrónica, Optimización, Mapas, Geometría, Química, Sistema P.E.R.T, Viajes, Juegos. Lo que nos permitió indagar y darnos cuenta que la teoría de grafos se puede aplicar a otros campos y no sólo a la Matemática como Ciencia, esto demuestra que la matemática es transversal en cuanto a su contenido.

En el capítulo de grafos y educación podemos ver que la gran mayoría de los juegos y aplicaciones causan un gran impacto en el estudiante, se presenta un gran desafío para ellos, en donde deben usar la lógica para poder resolverlos, estos y otros juegos se los sugerimos para algún taller y/o introducción a algún tema relacionado con el curriculum de enseñanza media y así poder contribuir al desarrollo del pensamiento de los alumnos.

Además el seminario está abierto a profundizar en cada uno de los tópicos aquí tratados, así también en las aplicaciones al poder desarrollar las actividades que están en el texto o investigar nuevos ejemplos.

Bibliografía

[1] *Teoría de grafos: Seminario de título*, Universidad del Bio Bio 1984, Victor Briones, Leopoldo Ortiz, Eugenio Pardo, Eduardo Quilodran.

[2] *Análisis de algoritmos y teoría de grafos,* M. abellanas D. Lodares ,1991

[3] *La teoría de grafos: Mapas del metro y redes neuronales,* Claudi Alsina, 2012.

[4] *Química orgánica*, Norman L. Allinger, 1979

[5] *Electricidad básica parte 1*, Common-Core 1975

Linkografía:

[1] http://www.fmat.cl/index.php?showforum=477

[2] http://www.unsa.edu.ar/~hibbard/discreta/grafos.pdf

[3]http://www2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/grafos/curso_grafos_handout080909.pdf